COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

16/7/2003

Tempo a disposizione: 2.5 ore

1. In un sistema di comunicazione, si utilizza una modulazione PM a banda larga per trasmettere un segnale PAM con simboli $\{a_k\}$ equiprobabili ed indipendenti appartenenti all'alfabeto ternario $\{0, \pm 1\}$. L'impulso $p(t)$ della modulazione PAM ha spettro a radice di coseno rialzato con roll-off 0 e l'intervallo di segnalazione è $T = 5\,\mu s$. L'indice di modulazione PM è $\phi_\Delta = \pi/2$ rad. La potenza trasmessa è $P_T = 1$ W ed il canale di trasmissione attenua di 20 dB il segnale trasmesso. Il canale di trasmissione introduce anche rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ con $N_0 = 25 \cdot 10^{-5}$ W/Hz. Al ricevitore si ha a disposizione un demodulatore PM alla cui uscita si pone il demodulatore PAM.

   (a) Si determini la densità spettrale di potenza del segnale PAM e la banda del segnale PM.

   (b) Si determini il rapporto segnale-rumore $\frac{S_i}{N_i}$ all'ingresso del demodulatore PM.

   (c) Si determini la densità spettrale di potenza del rumore ed il rapporto segnale-rumore $\frac{S_u}{N_u}$ all'uscita del demodulatore PM, supponendo che la soglia del demodulatore PM sia $(\frac{S_i}{N_i})_{th} = -50$ dB.

   (d) Si progetti il ricevitore numerico, da porre all'uscita del demodulatore PM, che minimizza la probabilità d'errore sui simboli a_k.

   (e) Si calcoli la probabilità d'errore sui simboli a_k. Per il calcolo della funzione $Q(x)$si utilizzi la seguente approssimazione valida per $x > 5$: $Q(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

   (f) Se il segnale PAM fosse stato trasmesso direttamente in banda base, a parità di potenza trasmessa, di attenuazione del canale e di rumore, quanto sarebbe stata la probabilità d'errore sul simbolo?

2. Per una trasmissione FM analogica, si determini il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore in funzione del rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore stesso, della banda del segnale trasmesso, della banda del segnale FM, della potenza ricevuta e della deviazione di frequenza.

Soluzione

1. Come è noto, il demodulatore PM può essere realizzato con un demodulatore FM seguito da un integratore. È quindi possibile utilizzare i risultati relativi alla modulazione FM (si veda anche la domanda n. 2.

   (a) Indicando con $s(t)$ il segnale PAM, esso potrà essere scritto come

   $$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)\,.$$

   La densità spettrale di potenza del segnale PAM è

   $$W_s(f) = W_a(f)\frac{|P(f)|^2}{T} = W_a(f)\frac{G(f)}{T}$$

   avendo indicato come di consueto $G(f) = |P(f)|^2$. Poiché $p(t)$ è un impulso con spettro a radice di coseno rialzato con roll-off 0, è

   $$G(f) = \begin{cases} T & \text{per } |f| < 1/2T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

   È inoltre

   $$\begin{aligned} E\{a_k\} &= 0 \\ E\{a_k^2\} &= 2/3 \end{aligned}$$

   e quindi è

   $$\begin{aligned} R_a(m) &= \frac{2}{3}\delta(m) \\ W_a(f) &= \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

   Pertanto

   $$W_s(f) = \frac{2}{3T}G(f)\,.$$

   Tale densità spettrale di potenza è mostrata in Fig. 1. La banda del segnale PAM è

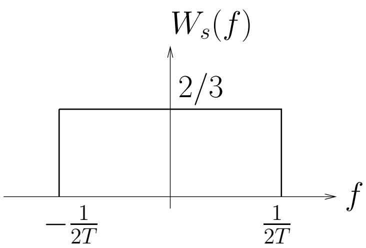

Figura 1:

   quindi $B = \frac{1}{2T} = 100$ kHz. Pertanto il segnale PM ha banda

   $$B_{PM} \simeq 2(\phi_\Delta + 1)B = 514\,\text{kHz}.$$

   (b) Il canale attenua di un fattore α la potenza del segnale trasmesso. Poiché è

   $$10\log_{10}\alpha = 20$$

   è $\alpha = 100$. Pertanto è $S_i = P_T/\alpha$ ed essendo inoltre $N_i = \frac{N_0}{2}2B_{PM} = N_0 B_{PM}$ si ha

   $$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_T/\alpha}{N_0 B_{PM}} \simeq 7.78 \cdot 10^{-5}\,(-41.09\,\text{dB})\,.$$

   Il ricevitore PM lavora quindi sopra soglia.

(c) Il demodulatore PM può vedersi come la cascata di un demodulatore FM e di un integratore. Come è noto, (si veda anche la domanda 2), se in ingresso al demodulatore FM si ha il segnale

$$x(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] + n(t)$$

dove con $n(t)$ si è indicato il rumore additivo gaussiano bianco, in uscita si avrà

$$\dot{\phi}(t) + \frac{\dot{n}_s(t)}{A_0}$$

dove si è indicato con $n_s(t)$ la componente in quadratura del rumore. Pertanto dopo l'integratore si ha

$$\phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_0}\,.$$

Nel nostro caso è $\phi(t) = \phi_\Delta s(t)$ e $A_0 = \sqrt{2S_i}$. Pertanto la densità spettrale di potenza del rumore all'uscita del demodulatore PM è, nella banda del segnale

$$W_n(f) = \frac{N_0}{2S_i}\,.$$

Si tratta quindi di rumore gaussiano bianco. La potenza di rumore è quindi $N_u = \frac{N_0}{2S_i} 2B$ mentre la potenza di segnale è

$$S_u = \phi_\Delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f)\, df = \phi_\Delta^2 \frac{2}{3T}\,.$$

Il rapporto segnale-rumore è quindi

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{\phi_\Delta^2 \frac{2}{3T}}{\frac{N_0}{2S_i} 2B} = \frac{4\phi_\Delta^2 S_i}{3N_0} \simeq 131.46\, (21.19\,\mathrm{dB})\,.$$

(d) Il ricevitore numerico sarà ovviamente costituito da un filtro adattato, un campionatore e, dal momento che l'impulso $p(t)$ è tale da garantire assenza di ISI, da un decisore a soglia. Dal momento che i simboli sono equiprobabili, le soglie vanno scelte a metà tra i livelli.

(e) Il campione all'istante ℓT dell'uscita dal filtro adattato potrà essere scritto come

$$x_\ell = \phi_\Delta a_\ell + \frac{n_s(t) \otimes p(-t)|_{t=\ell T}}{\sqrt{2S_i}}\,.$$

La varianza del rumore è quindi

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2S_i}\,.$$

Pertanto è

$$\begin{aligned} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell) &= \frac{1}{3} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = 0) + \frac{1}{3} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = 1) + \frac{1}{3} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = -1) \\ &= \frac{1}{3} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = 0) + \frac{2}{3} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = -1) \end{aligned}$$

ed essendo

$$\begin{aligned} P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = 0) &= 2Q\left(\frac{\phi_\Delta}{2\sigma}\right) \\ P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell | a_\ell = -1) &= Q\left(\frac{\phi_\Delta}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

si ha

$$P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell) = \frac{4}{3} Q\left(\frac{\phi_\Delta}{2\sigma}\right) = \frac{4}{3} Q(7.02) = 1.5 \cdot 10^{-12}\,.$$

(f) Se il segnale PAM fosse stato trasmesso direttamente in banda base, il segnale ricevuto sarebbe stato

$$r(t) = \beta \sum_k a_k p(t - kT) + n(t)$$

dove la costante β va scelta in modo tale che la potenza di segnale ricevuto sia $S_i = P_T/\alpha$. Pertanto, poiché la potenza del segnale PAM $\beta \sum_k a_k p(t - kT)$ è $\beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f)\, df = \beta^2 \frac{2}{3T}$, si ricava che $\beta = 0.027$. All'uscita del campionatore è stavolta

$$x_\ell = \beta a_\ell + n(t) \otimes p(-t)|_{t=\ell T}$$

e pertanto la varianza del rumore ora è $\sigma'^2 = N_0/2$. Quindi è

$$P(\hat{a}_\ell \neq a_\ell) = \frac{4}{3} Q\left(\frac{\beta}{2\sigma'}\right) = \frac{4}{3} Q(1.21) = 0.15\,.$$

2. Domanda di teoria.