COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

Compito del 18/2/2003

1. In un sistema di trasmissione FM, il segnale modulante ha banda $B = 15$ kHz e potenza media $P_x = 10^{-3}$ V^2. Il modulatore è caratterizzato da una deviazione di frequenza pari a $f_\Delta = 200$ kHz.

   (a) Si determini la banda del segnale FM.

   (b) Sapendo che il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore è $S_i/N_i = 20$ dB, si valuti il rapporto segnale-rumore S_u/N_u all'uscita del demodulatore stesso (in dB).

2. In un sistema di trasmissione PPM binario, l'impulso modulante è $p(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right)$. Il bit "0" (trasmesso con probabilità 1/2) è associato all'impulso $p(t)$ mentre il bit "1" è associato all'impulso $p(t - T/2)$. Lo schema del ricevitore è mostrato in Fig. 1. Il segnale ricevuto $r(t)$ è rappresentato dal segnale trasmesso cui si somma il rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale $N_0/2$ con $N_o = 1/16$ V^2/Hz. Il decisore opera secondo la seguente strategia

$$\begin{cases} y > 0 \Rightarrow \text{si decide per } 0 \\ y \leq 0 \Rightarrow \text{si decide per } 1 \end{cases}.$$

   (a) Si determinino le statistiche della variabile casuale y condizionatamente alla trasmissione del bit "0" e del bit "1".

   (b) Si calcoli la probabilità d'errore sul bit.

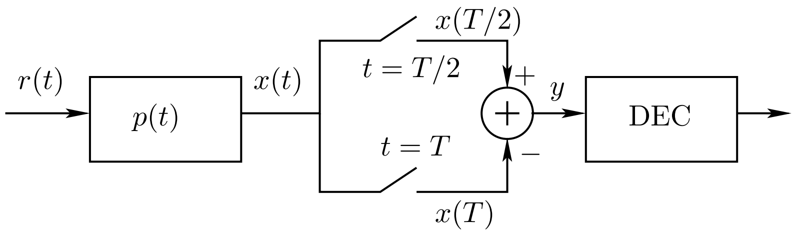

Figura 1:

Soluzione

1. **Esercizio sulle modulazioni analogiche.**

   (a) La banda del segnale FM può calcolarsi come

   $$B_{FM} \simeq 2(f_\Delta + 2B) = 460\,\text{kHz}\,.$$

   (b) Il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore può essere calcolato come

   $$\frac{S_u}{N_u} = \frac{3f_\Delta^2 P_x A_0^2}{2N_0 B^3}$$

   dove $N_0/2$ è la densità spettrale di potenza del rumore e A_0 è l'ampiezza della portante ricevuta. Poiché il rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore può essere calcolato come

   $$\frac{S_i}{N_i} = \frac{A_0^2}{2N_0 B_{FM}}$$

   si può calcolare il rapporto segnale-rumore all'uscita del demodulatore in funzione del rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore come

   $$\frac{S_u}{N_u} = \frac{3f_\Delta^2 P_x B_{FM}}{B^3}\frac{S_i}{N_i} \simeq 1635.56 \;\; (32.14\,\text{dB})\,.$$

2. **Esercizio sulle modulazioni numeriche.**

   (a) Nell'ipotesi di trasmissione del bit "0" si ha

   $$r(t) = p(t) + n(t)$$

   avendo indicato con $n(t)$ il rumore gaussiano bianco. Pertanto

   $$x(t) = p(t) \otimes p(t) + n(t) \otimes p(t) = g(t) + n_1(t)$$

   avendo definito $g(t) \stackrel{\triangle}{=} p(t) \otimes p(t)$ e $n_1(t) \stackrel{\triangle}{=} n(t) \otimes p(t)$. L'impulso $g(t)$ è indicato in Fig. 2. La variabile casuale y, condizionatamente alla trasmissione del bit "0" può quindi

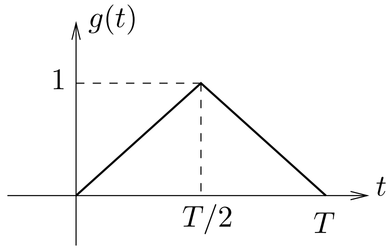

Figura 2:

   essere espressa come

   $$y = x(T/2) - x(T) = 1 + n_1(T/2) - n_1(T) = 1 + N\,.$$

   La variabile casuale N è ovviamente a media nulla, gaussiana e con varianza

   $$\begin{aligned}\sigma_N^2 &= E\{N\} = E\{[n_1(T/2) - n_1(T)]^2\}\\ &= E\{n_1^2(T/2)\} + E\{n_1^2(T)\} - 2E\{n_1(T/2)n_1(T)\}\\ &= 2R_{n_1}(0) - 2R_{n_1}(T/2)\,.\end{aligned}$$

La funzione di autocorrelazione del rumore $n_1(t)$ può essere calcolata antitrasformando la sua densità spettrale di potenza $S_{n_1}(f) = \frac{N_0}{2}|P(f)|^2$. Pertanto

$$R_{n_1}(\tau) = \frac{N_0}{2} g(t + T/2)$$

e quindi $R_{n_1}(0) = N_0/2$ e $R_{n_1}(T/2) = 0$ da cui

$$\sigma_N^2 = N_0 \, .$$

Nell'ipotesi di trasmissione del bit "1" si ha

$$r(t) = p(t - T/2) + n(t)$$

Pertanto in questo caso

$$x(t) = p(t - T/2) \otimes p(t) + n(t) \otimes p(t) = g(t - T/2) + n_1(t)$$

La variabile casuale y, condizionatamente alla trasmissione del bit "1" può quindi essere espressa come

$$y = x(T/2) - x(T) = n_1(T/2) - 1 - n_1(T) = -1 + N \, .$$

(b) La probabilità d'errore sul bit P_b può calcolarsi come

$$P_b = P\{\text{decido per } 1|\text{ ho trasmesso } 0\}\frac{1}{2} + P\{\text{decido per } 0|\text{ ho trasmesso } 1\}\frac{1}{2} \, .$$

Per simmetria, le due probabilità condizionate sono uguali. Pertanto

$$\begin{aligned} P\{\text{decido per } 0|\text{ ho trasmesso } 1\} &= P\{y > 0|\text{ho trasmesso } 1\} \\ &= P\{-1 + N > 0\} = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) \end{aligned}$$

Pertanto

$$P_b = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) = \mathrm{Q}(4) = 3 \cdot 10^{-5} \, .$$