COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

Prova scritta del 11/1/2005

Parte II

Tempo a disposizione: 2 ore

1. Nell'ipotesi di trasmettere un impulso $p(t)$ su un canale AWGN, si dimostri che il filtro lineare ed invariante con risposta impulsiva $h(t)$ che massimizza il rapporto

$$\frac{[p(t) \otimes h(t)]^2|_{t=t_0}}{E\{n^2(t)\}}$$

dove $n(t)$ è il rumore all'uscita del filtro, è il filtro con risposta impulsiva $h(t) = p(t_0 - t)$.

2. In un sistema di trasmissione PAM in banda base, i simboli trasmessi a_i sono ottenuti codificando i simboli b_i equiprobabili, indipendenti ed appartenenti all'alfabeto $\{\pm 1\}$, attraverso la relazione $a_i = b_i - b_{i-1}$. Nell'ipotesi che $p(t)$ sia un impulso rettangolare di durata T e altezza $1/\sqrt{T}$, si calcoli la densità spettrale di potenza del segnale PAM $s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$ e se ne disegni il grafico.

3. In un sistema di trasmissione PAM binario in banda base, i simboli trasmessi a_i sono equiprobabili, indipendenti ed appartenenti all'alfabeto $\{\pm 1\}$. I campioni all'uscita del filtro di ricezione possono essere espressi nella forma

$$x_k = a_k + 0.2a_{k-1} + n_k$$

dove n_k sono campioni gaussiani con funzione di autocorrelazione $R_n(m) = E\{n_{k+m}n_k\} = \frac{N_0}{2}\delta(m)$, con $N_0 = 0.08$ V^2/Hz.

   (a) Si calcoli la probabilità d'errore sul bit nell'ipotesi di effettuare le decisioni utilizzando un decisore a soglia con soglia zero.

   (b) Si calcoli l'errore quadratico medio $E\{(x_k - a_k)^2\}$.

   (c) Si dimensioni un equalizzatore con 2 prese (1 elemento di ritardo) secondo il seguente criterio (dell'errore quadratico medio minimo): indicando con y_k l'uscita dell'equalizzatore, si dimensionino le prese dell'equalizzatore in modo da minimizzare l'errore quadratico medio $J = E\{(y_k - a_k)^2\}$. Si calcoli il valore minimo corrispondente di J.

Risultati e soluzione: *http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe*

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. Come è noto, è

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T}|P(f)|^2 .$$

La trasformata di Fourier dell'impulso $p(t)$ è $P(f) = \sqrt{T}\text{sinc}fT$. Inoltre

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m)e^{j2\pi mfT}$$

dove

$$R_a(m) = E\{a_{k+m}a_k\} .$$

L'autocorrelazione dei simboli $\{a_k\}$ può essere espressa in funzione dell'autocorrelazione dei simboli $\{b_k\}$. È infatti

$$R_b(m) = E\{b_{k+m}b_k\} = \begin{cases} E\{b_k^2\} = 1 & \text{per } m = 0 \\ E\{b_{k+m}\}E\{b_k\} = 0 & \text{per } m \neq 0 \end{cases} = \delta(m)$$

e

$$\begin{aligned} R_a(m) &= E\{a_{k+m}a_k\} = E\{(b_{k+m} - b_{k+m-1})(b_k - b_{k-1})\} \\ &= 2R_b(m) - R_b(m-1) - R_b(m+1) \\ &= 2\delta(m) - \delta(m-1) - \delta(m+1) . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$W_a(f) = 2 - e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT} = 2 - 2\cos 2\pi fT$$

e

$$W_s(f) = \text{sinc}(fT)[2 - 2\cos 2\pi fT]$$

il cui grafico è mostrato in Fig. 1.

3. All'uscita del filtro di ricezione si ha presenza di ISI.

   (a) Utilizzando il teorema della probabilità totale si ha (essendo i simboli equiprobabili ed indipendenti è $P(a_k = \alpha, a_{k-1} = \beta) = P(a_k = \alpha)P(a_{k-1} = \beta) = 1/4$)

$$\begin{aligned} P(\hat{a}_k \neq a_k) &= \frac{1}{4}[P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1, a_{k-1} = 1) + P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1, a_{k-1} = -1) \\ &\quad + P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = -1, a_{k-1} = 1) + P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = -1, a_{k-1} = -1)] . \end{aligned}$$

   I singoli addendi possono calcolarsi come

$$\begin{aligned} P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1, a_{k-1} = 1) &= \text{Q}(\tfrac{1.2}{\sigma}) \\ P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = 1, a_{k-1} = -1) &= \text{Q}(\tfrac{0.8}{\sigma}) \\ P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = -1, a_{k-1} = 1) &= \text{Q}(\tfrac{0.8}{\sigma}) \\ P(\hat{a}_k \neq a_k|a_k = -1, a_{k-1} = -1) &= \text{Q}(\tfrac{1.2}{\sigma}) \end{aligned}$$

   dove $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$. È quindi

$$P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{2}\text{Q}(\tfrac{1.2}{\sigma}) + \frac{1}{2}\text{Q}(\tfrac{0.8}{\sigma}) = \frac{1}{2}\text{Q}(6) + \frac{1}{2}\text{Q}(4) \simeq 1.58 \cdot 10^{-5} .$$

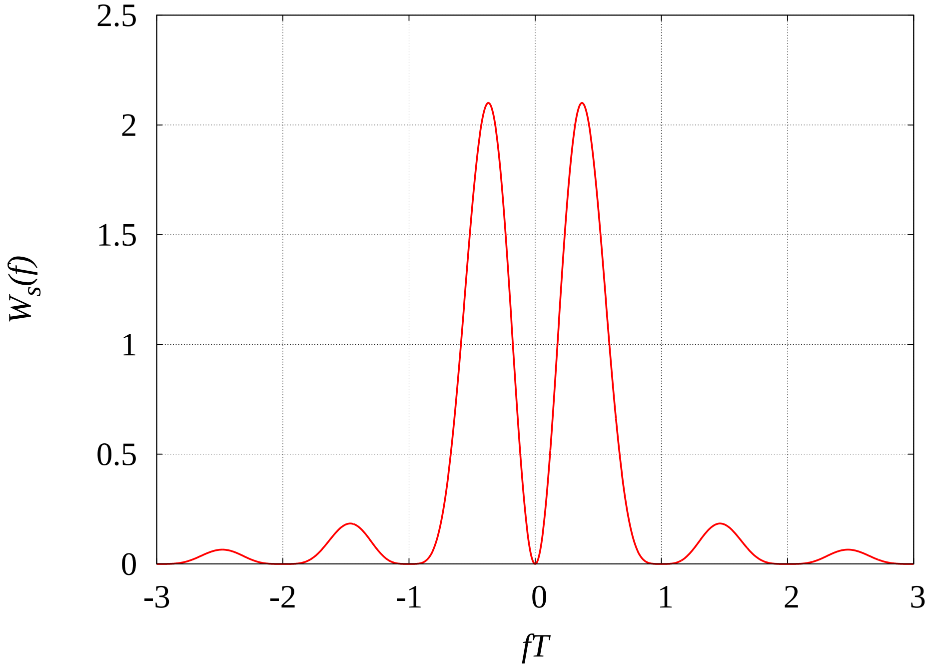

Figura 1:

(b) L'errore quadratico medio è

$$E\{(x_k - a_k)^2\} = E\{(0.2a_{k-1} + n_k)^2\} = 0.04 + \frac{N_0}{2} = 0.08$$

essendo

$$\begin{aligned} E\{a_{k-1}^2\} &= 1 \\ E\{n_k^2\} &= \frac{N_0}{2} \,. \end{aligned}$$

(c) Il campione y_k all'uscita dell'equalizzatore può esprimersi come

$$y_k = c_0 x_k + c_1 x_{k-1} = c_0 a_k + (c_1 + 0.2c_0)a_{k-1} + 0.2c_1 a_{k-2} + c_0 n_k + c_1 n_{k-1} \,.$$

Si ha quindi

$$y_k - a_k = (c_0 - 1)a_k + (c_1 + 0.2c_0)a_{k-1} + 0.2c_1 a_{k-2} + c_0 n_k + c_1 n_{k-1}$$

il cui valore quadratico medio è

$$\begin{aligned} J = E\{(y_k - a_k)^2\} &= E\{[(c_0 - 1)a_k + (c_1 + 0.2c_0)a_{k-1} + 0.2c_1 a_{k-2} + c_0 n_k + c_1 n_{k-1}]^2\} \\ &= (c_0 - 1)^2 + (c_1 + 0.2c_0)^2 + 0.04c_1^2 + c_0^2 \frac{N_0}{2} + c_1^2 \frac{N_0}{2} \\ &= 1.08c_0^2 + 1.08c_1^2 + 0.4c_0 c_1 - 2c_0 + 1 \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} E\{a_k^2\} &= E\{a_{k-1}^2\} = E\{a_{k-2}^2\} = 1 \\ E\{a_k a_{k-1}\} &= E\{a_k\}E\{a_{k-1}\} = 0 \\ E\{a_k a_{k-2}\} &= E\{a_k\}E\{a_{k-1}\} = 0 \\ E\{n_k^2\} &= E\{n_{k-1}^2\} = \frac{N_0}{2} = 0.04 \\ E\{a_k n_m\} &= E\{a_k\}E\{n_m\} = 0 \,. \end{aligned}$$

I valori delle prese che minimizzano J si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial c_0} &= 2.16c_0 + 0.4c_1 - 2 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_1} &= 2.16c_1 + 0.4c_0 = 0\,.\end{aligned}$$

I valori corrispondenti delle prese sono quindi

$$\begin{aligned}c_0 &= 0.9588 \\ c_1 &= -0.1776\end{aligned}$$

Il valore minimo corrispondente di J è

$$J = 0.0412\,.$$