COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

Verifica finale del 30/1/2003

In un sistema di trasmissione PAM in banda base, i simboli a_i emessi dalla sorgente di informazione sono equiprobabili, indipendenti ed appartengono all'alfabeto ternario $\{-1, 0, 1\}$. Il rumore gaussiano bianco introdotto dal canale ha densità spettrale di potenza $N_0/2$ con $N_0 = \frac{1}{32}$ V^2/Hz ed è $T = 1$ ms.

1. Supponendo che il canale sia ideale, si dimensionino l'impulso di trasmissione $p(t)$ ed il filtro di ricezione $h_R(t)$ in modo che il sistema abbia banda $B = 750$ Hz e sia minimizzata la probabilità d'errore sul simbolo.
2. Si determini la struttura del ricevitore che minimizza la probabilità d'errore sul simbolo.
3. Si calcoli la probabilità d'errore sul simbolo del ricevitore dimensionato al punto precedente.
4. Mantenendo inalterati l'impulso di trasmissione ed il filtro di ricezione così come dimensionati ai punti precedenti, nel caso in cui la risposta in frequenza del canale sia

$$C(f) = \begin{cases} 1 + j0.2\sin(2\pi fT) & \text{per } |fT| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   si determini il valore degli interferenti al campionatore.
5. Per migliorare le prestazioni del ricevitore si introduce in questo caso un equalizzatore trasversale con due celle di ritardo (3 prese). Si dimensionino le prese dell'equalizzatore secondo il criterio dello *zero-forcing* (si imponga che l'impulso dopo l'equalizzatore assuma valore pari a 1 per $t = T$).
6. Si calcolino gli interferenti residui.
7. Si calcoli la varianza dei campioni di rumore dopo l'equalizzatore.
8. Si calcoli la probabilità d'errore condizionata $P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\}$ al ricevitore dopo l'inserimento dell'equalizzatore (assumendo sempre di utilizzare lo stesso decisore a soglie del punto 2).

Risultati e soluzione: *http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe*

Soluzione:

1. Il filtro di ricezione $h_R(t)$ deve essere adattato all'impulso ricevuto (che è poi quello trasmesso se il canale è ideale), e cioè all'impulso $p(t)$, ed inoltre la convoluzione dell'impulso ricevuto e della risposta impulsiva del filtro di ricezione deve essere un impulso di Nyquist $g_N(t)$ con spettro $G_N(f)$ a coseno rialzato (con banda $B = \frac{1+\alpha}{2T} = 750$ Hz e quindi $\alpha = 0.5$). Quindi, in frequenza
$$\begin{aligned} H_R(f) &= P^*(f) = P(-f) \\ P(f)H_R(f) &= G_N(f)\,. \end{aligned}$$
Pertanto
$$|P(f)| = |H_R(f)| = \sqrt{G_N(f)}$$
(la risposta in fase non ha alcuna importanza dal momento che $H_R(f) = P^*(f)$ e quindi la risposta in fase del filtro di ricezione compensa esattamente quella del filtro di trasmissione).

2. Con la scelta dei filtri fatta al punto precedente, il ricevitore è costituito, oltre che dal filtro adattato, da un campionatore e da un decisore a soglie (non si ha ISI). Supponendo che sia $g_N(0) = 1$, le soglie valgono $\pm 1/2$.

3. Per il ricevitore indicato al punto precedente, il campione all'uscita del filtro adattato all'istante kT vale
$$x_k = a_k + n_{1k}$$
dove n_{1k} è una variabile casuale gaussiana a valor medio nullo e varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} g_N(0) = \frac{N_0}{2}$. Pertanto
$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k\} &= \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\} \\ &= \frac{2}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} \end{aligned}$$
visto che, per simmetria, $P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} = P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\}$. Poiché
$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} &= P\{x_k > -\frac{1}{2} | a_k = -1\} = P\{-1 + n_{1k} > -\frac{1}{2}\} = P\{n_{1k} > \frac{1}{2}\} \\ &= \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right) \end{aligned}$$
e analogamente
$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = 2\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right)$$
si ha
$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{4}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{4}{3}\mathrm{Q}(4) = 4 \cdot 10^{-5}\,.$$

4. La risposta in frequenza del canale può essere espressa come
$$\begin{aligned} C(f) &= [1 + j0.2\sin(2\pi fT)]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right) = \left[1 + j0.2\left(\frac{e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}}{2j}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right) \\ &= \left[1 + 0.1\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)\,. \end{aligned}$$
Pertanto, l'impulso $g(t)$ all'uscita del filtro $h_R(t)$ ha ora spettro
$$G(f) = P(f)C(f)H_R(f) = G_N(f)\left[1 + 0.1\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)\right]$$
e quindi
$$g(t) = g_N(t) + 0.1 g_N(t+T) - 0.1 g_N(t-T)\,.$$

Pertanto

$$g(kT) = g_N(kT) + 0.1g_N[(k+1)T] - 0.1g_N[(k-1)T] = \delta_k + 0.1\delta_{k+1} - 0.1\delta_{k-1}$$

e quindi

$$x_k = a_k + 0.1a_{k+1} - 0.1a_{k-1} + n_{1k}\,.$$

Si noti che il rumore non è cambiato, non essendo cambiato il filtro di ricezione.

5. L'impulso $q(t)$ all'uscita dell'equalizzatore può essere espresso come

$$q(t) = c_0 g(t) + c_1 g(t-T) + c_2 g(t-2T)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} q(kT) &= c_0 g(kT) + c_1 g[(k-1)T] + c_2 g[(k-2)T] \\ &= 0.1c_0\delta_{k+1} + (c_0 + 0.1c_1)\delta_k + (-0.1c_0 + c_1 + 0.1c_2)\delta_{k-1} \\ &\quad +(-0.1c_1 + c_2)\delta_{k-2} - 0.1c_2\delta_{k-3}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo le condizioni

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \end{cases}$$

dalla (1) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_0 + 0.1c_1 = 0 \\ -0.1c_0 + c_1 + 0.1c_2 = 1 \\ -0.1c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

che risolto fornisce

$$\begin{cases} c_0 \simeq -0.1 \\ c_1 \simeq 0.98 \\ c_2 \simeq 0.1 \end{cases}$$

6. Sostituendo nella (1) i valori calcolati delle prese si ottiene

$$\begin{cases} q(-T) \simeq -0.01 \\ q(0) = 0 \\ q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \\ q(3T) \simeq -0.01 \end{cases}$$

(gli altri campioni di $q(kT)$ sono ovviamente nulli).

7. Il rumore $n_2(t)$ dopo l'equalizzatore può essere espresso in funzione del rumore $n_1(t)$ prima dell'equalizzatore come

$$n_2(t) = c_0 n_1(t) + c_1 n_1(t-T) + c_2 n_1(t-2T)\,. \tag{2}$$

Poiché l'autocorrelazione del processo $n_1(t)$ è $R_1(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\otimes h_R(\tau)\otimes h_R(-\tau) = \frac{N_0}{2}g_N(\tau)$, è possibile calcolare immediatamente, dalla (2), la varianza σ_2^2 del processo $n_2(t)$ (che, essendo il processo a media nulla, coincide col valor quadratico medio):

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= E\{n_2^2(t)\} = E\{[c_0 n_1(t) + c_1 n_1(t-T) + c_2 n_1(t-2T)]^2\} \\ &= c_0^2 E\{n_1^2(t)\} + c_1^2 E\{n_1^2(t-T)\} + c_2^2 E\{n_1^2(t-2T)\} + 2c_0c_1 E\{n_1(t)n_1(t-T)\} \\ &\quad +2c_0c_2 E\{n_1(t)n_1(t-2T)\} + 2c_1c_2 E\{n_1(t-T)n_1(t-2T)\} \\ &= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2)\frac{N_0}{2} \simeq 0.98\frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

essendo $E\{n_1^2(t)\} = E\{n_1^2(t-T)\} = E\{n_1^2(t-2T)\} = \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, $E\{n_1(t)n_1(t-T)\} = E\{n_1(t-T)n_1(t-2T)\} = R_1(T) = \frac{N_0}{2}g_N(T) = 0$ e $E\{n_1(t)n_1(t-2T)\} = R_1(2T) = \frac{N_0}{2}g_N(2T) = 0$.

8. Tenendo conto dei risultati dei punti 6 e 7, in presenza dell'equalizzatore il campione y_k all'istante kT del segnale all'uscita dell'equalizzatore può esprimersi come

$$y_k = -0.01a_{k+1} + a_{k-1} - 0.01a_{k-3} + n_{2k} \,.$$

Suppondo di utilizzare tale campione per decidere sul simbolo a_{k-1}, per decidere sul simbolo a_k si utilizzerà il campione

$$y_{k+1} = -0.01a_{k+2} + a_k - 0.01a_{k-2} + n_{2k} \,.$$

La probabilità d'errore condizionata richiesta può calcolarsi, tenendo conto del fatto che i simboli sono indipendenti ed equiprobabili, come

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = \frac{1}{9} \sum_{\alpha \in \{0, \pm 1\}} \sum_{\beta \in \{0, \pm 1\}} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} \,. \quad (3)$$

Il generico termine della sommatoria può calcolarsi come

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} &= P\{y_{k+1} > \frac{1}{2} | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} \\ &\quad + P\{y_{k+1} < -\frac{1}{2} | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} \\ &= P\{-0.01\alpha - 0.01\beta + n_{2k} > \frac{1}{2}\} \\ &\quad + P\{-0.01\alpha - 0.01\beta + n_{2k} < -\frac{1}{2}\} \\ &= \mathrm{Q}\left(\frac{0.5 + 0.01[\alpha + \beta]}{\sigma_2}\right) \\ &\quad + \mathrm{Q}\left(\frac{0.5 - 0.01[\alpha + \beta]}{\sigma_2}\right) \,. \end{aligned}$$

Pertanto, sostituendo nella (3) otteniamo

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = \frac{2}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{0.5}{\sigma_2}\right) + \frac{4}{9}\mathrm{Q}\left(\frac{0.51}{\sigma_2}\right) + \frac{2}{9}\mathrm{Q}\left(\frac{0.52}{\sigma_2}\right) + \frac{4}{9}\mathrm{Q}\left(\frac{0.49}{\sigma_2}\right) + \frac{2}{9}\mathrm{Q}\left(\frac{0.48}{\sigma_2}\right) \,.$$