Comunicazioni elettriche A - Prof. Giulio Colavolpe

Compito n. 4

4.1 Un segnale analogico di banda 10 kHz è campionato a frequenza doppia di quella di Nyquist. Si effettua poi una quantizzazione a 256 livelli. Determinare la velocità di trasmissione (bit rate) in bit/s.

4.2 Un segnale PAM ha la seguente espressione

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t - iT)\,.$$

I simboli a_i, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1, \pm 3\}$ mentre l'impulso $p(t)$ ha espressione

$$p(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T}} & \text{per } 0 \le t < T \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

1. Si tracci il grafico di uno spezzone di funzione campione corrispondente alla sequenza $-3, -1, -1, +1, -1, +1, +3$.
2. Si tracci il diagramma ad occhio di $s(t)$.
3. Assumendo $T = 10^{-3}$ s, si dica quanto vale la velocità di trasmissione (bit rate) in bit/s.

4.3 Si descrivano i criteri per la scelta del roll-off degli impulsi a radice di coseno rialzato utilizzati nelle trasmissioni PAM.

4.4 Un segnale PAM ha la seguente espressione

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t - iT)\,.$$

I simboli a_i, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$ mentre l'impulso $p(t)$ ha espressione $p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$, con $T = 8 \cdot 10^{-5}$ s.

1. Si determini la densità spettrale di potenza di $s(t)$ e se ne disegni il grafico.
2. Trasmettendo tale segnale su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 10^{-5}$ V^2/Hz, determinare la struttura del ricevitore ottimo e la probabilità d'errore.

4.5 Un segnale PAM ha la seguente espressione

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t - iT)\,.$$

I simboli a_i, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$ mentre l'impulso $p(t)$ è tale che la sua trasformata continua di Fourier è $P(f) = T\text{sinc}(fT)$ con $T = 9 \cdot 10^{-5}$ s.

1. Si determini la densità spettrale di potenza di $s(t)$ e se ne disegni il grafico.
2. Trasmettendo tale segnale su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 10^{-5}$ V^2/Hz, determinare la struttura del ricevitore ottimo e la probabilità d'errore.

3. Determinare la probabilità d'errore nell'ipotesi in cui il campionamento non si effettui all'istante ottimo ma ad un istante che differisca da esso di $\tau = T/4$.

4.6 In un sistema di comunicazione PAM quaternario con impulsi trasmessi a radice di coseno rialzato con roll-off 0,5, i simboli trasmessi appartengono all'alfabeto $\{\pm 1, \pm 3\}$ e sono indipendenti ed equiprobabili. L'intervallo di simbolo è $T = 1$ ms ed il segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ (N_0= 0,08 V^2/Hz).

1. Determinare la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso (e disegnarne il grafico) e la banda occupata.
2. Determinare la struttura del ricevitore ottimo.
3. Calcolare la probabilità d'errore.

4.7 In un sistema di comunicazione PAM ternario con impulsi trasmessi a radice di coseno rialzato con roll-off 0,5 (si assuma $g(0) = 1$) i simboli trasmessi appartengono all'alfabeto $\{-A, 0, A\}$ e sono indipendenti ed equiprobabili. L'intervallo di simbolo è $T = 1$ ms ed il segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$ (N_0=0,01 V^2/Hz).

1. Determinare la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso (e disegnarne il grafico) e la banda occupata.
2. Determinare la struttura del ricevitore ottimo.
3. Determinare il valore minimo di A che consente di ottenere una probabilità d'errore sul simbolo pari a $1.333 \cdot 10^{-5}$.

4.8 All'ingresso del ricevitore in Fig. 1 è applicato il segnale modulato in fase a banda stretta

$$x(t) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \alpha(t)]$$

sovrapposto a rumore bianco $n_1(t)$ gaussiano con densità spettrale di potenza $N_0/2$. Il segnale $\alpha(t)$ è del tipo

$$\alpha(t) = h \sum_i a_i p(t - iT)$$

dove $h = 0.1$ rad. ed i simboli a_i sono indipendenti, equiprobabili ed appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$. La trasformata di Fourier di $p(t)$ è

$$P(f) = \begin{cases} \sqrt{T(1 - |fT|)} & \text{per } |fT| < 1 \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

1. Tenendo conto $x(t)$ è un segnale modulato in fase a banda stretta e sapendo che $G_R(f)$ è un filtro passa basso ideale di banda $1/T$, si determini la risposta in frequenza $H(f)$ del filtro di front-end in modo da conseguire il massimo rapporto segnale-rumore al campionatore (si consiglia di utilizzare gli equivalenti in banda base).
2. Si scriva l'espressione del segnale all'uscita del filtro $G_R(f)$ e si verifichi l'assenza di ISI agli istanti di campionamento.
3. Si calcoli la probabilità d'errore del ricevitore

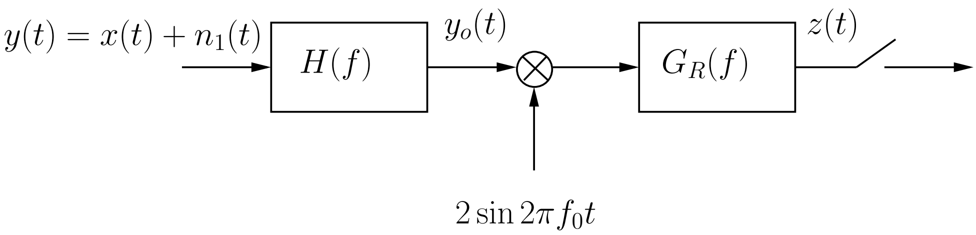

Figura 1:

4.9 In un sistema di comunicazione PAM il segnale trasmesso è del tipo

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t - iT)$$

dove

$$P(f) = \begin{cases} T/2 & \text{per } |fT| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \,. \end{cases}$$

Non si ha pertanto ISI essendo verificata la condizione di Nyquist. Poiché l'effetto congiunto del canale di trasmissione e del filtro di ricezione, rappresentati dalla funzione di trasferimento

$$C(f) = \begin{cases} 1 + \alpha e^{-j2\pi fT} & \text{per } |fT| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è tale da introdurre ISI, si rende necessario l'inserimento di un equalizzatore a 3 coefficienti avente risposta in frequenza

$$E(f) = \sum_{n=0}^{2} c_n e^{-j2\pi nfT} \,.$$

1. Si calcolino i campioni della risposta impulsiva complessiva del sistema, la cui trasformata di Fourier è $H(f) = P(f)C(f)E(f)$, agli istanti di campionamento kT in funzione di α, c_0, c_1e c_2.

2. Si esprima l'errore quadratico medio $\varepsilon = \sum_k [h(kT) - h_{id}(kT)]^2$ tra i campioni della risposta impulsiva $h(kT)$ e di quella ideale $h_{id}(kT)$ ottenuta equalizzando perfettamente il canale in modo che la cascata del filtro di trasmissione, del canale e dell'equalizzatore equivalga ad un filtro che amplifica di $T/2$ e ritarda di T secondi sulla banda $|f| \leq 1/T$.

3. Si determinino i valori di c_0, c_1e c_2 che minimizzano, in funzione di α, l'errore quadratico medio ε. Si calcoli poi l'errore quadratico medio minimo in funzione di α.

4. Si dimensionino i coefficienti c_0, c_1e c_2 secondo il criterio dello zero-forcing e quindi, posto $\alpha = 1$, si calcoli l'errore quadratico medio ε corrispondente.

4.10 In un sistema di comunicazione in banda base il segnale ricevuto è

$$r(t) = s(t) + w(t)$$

dove $s(t)$ è un segnale PAM del tipo

$$s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$$

mentre $w(t)$ è rumore gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$ con $N_0 = 1/8$ V^2/Hz. I simboli a_i sono indipendenti ed equiprobabili ed appartengono all'alfabeto binario $\{\pm 1\}$, mentre l'impulso $p(t)$ può essere espresso come

$$p(t) = h(t) - h(t - T/2)$$

con $T = 1$ ms e

$$h(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & -T/2 \le t \le 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lo schema del ricevitore è mostrato in Fig. 2. I campioni $y(kT)$ sono ottenuti mediante combinazione lineare di $x(kT)$ e $x(kT - T/2)$:

$$y(kT) = -x(kT) + x(kT - T/2)$$

mentre le decisioni sui simboli a_k sono prese mediante la regola

$$\hat{a}_k = \text{sgn}[y(kT)] .$$

1. Si disegni il grafico della densità spettrale di potenza del segnale $s(t)$.
2. Si dimostri che il ricevitore è ottimo per la rivelazione dei simboli a_i.
3. Si calcoli la probabilità di errore P_s sui simboli a_i.

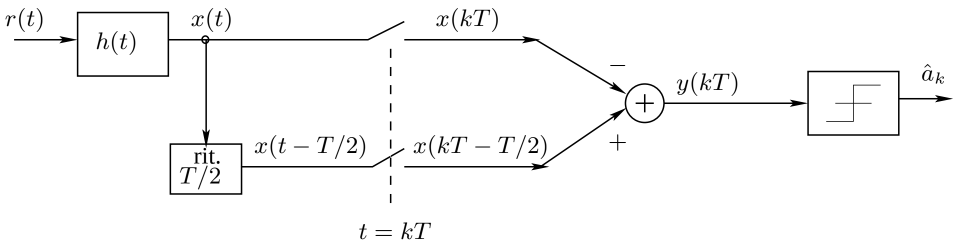

Figura 2:

4.11 In un sistema di comunicazione in banda base il segnale ricevuto è

$$r(t) = s_1(t) + s_2(t) + w(t)$$

dove $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono segnali PAM del tipo

$$s_1(t) = \sum_i a_i p_1(t - iT) \qquad s_2(t) = \sum_i b_i p_2(t - iT)$$

mentre $w(t)$ è rumore gaussiano bianco, con densità spettrale di potenza pari a $N_0/2$ con $N_0 = \frac{1}{8}10^{-3}$ V^2/Hz. I simboli $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ sono indipendenti ed equiprobabili ed appartengono all'alfabeto binario $\{\pm 1\}$, mentre gli impulsi $p_1(t)$ e $p_2(t)$ sono rappresentati in Fig. 3, con $T = 1$ ms. Al ricevitore si è interessati ai soli simboli $\{a_i\}$ e cioè il segnale $s_2(t)$ è considerato come un disturbo. Si indichi con $x(t)$ l'uscita di un filtro con risposta all'impulso $p_1(-t)$ quando tale filtro è alimentato dal segnale ricevuto $r(t)$.

1. Si dimostri che i campioni $x(kT)$ non dipendono dai simboli $\{b_i\}$.
2. Si calcoli la probabilità d'errore della strategia di decisione sui simboli $\{a_i\}$ che opera secondo la regola
$$\hat{a}_k = \text{sgn}[x(kT)] .$$

4.12 In un sistema di trasmissione PAM, la sorgente di informazione emette ogni T secondi i simboli b_i. Tali simboli sono indipendenti e possono assumere i valori ± 0.5 con la stessa probabilità. Il segnale trasmesso ha espressione

$$s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$$

dove i simboli a_i sono ottenuti a partire da simboli b_i attraverso la relazione $a_i = b_i - b_{i-1}$ mentre $p(t)$ è un impulso con spettro a radice di coseno rialzato con roll-off $\alpha = 1$.

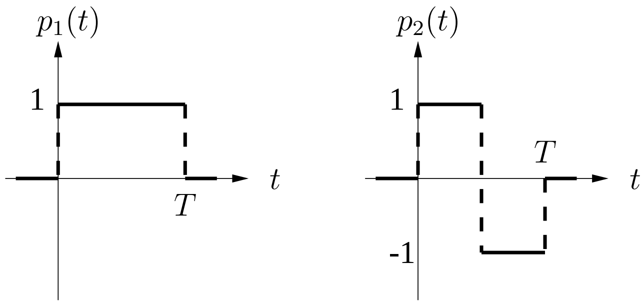

Figura 3:

1. Si determini l'espressione della densità spettrale di potenza di $s(t)$ e se ne tracci l'andamento in un grafico.
2. Supponendo ora che i simboli a_i appartengano all'alfabeto $\{0, \pm 1\}$ e siano equiprobabili ed indipendenti e che il canale introduca rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, si calcoli la probabilità d'errore del ricevitore che decide sui simboli a_i e che è costituito da un filtro adattato all'impulso $p(t)$, da un campionatore e da un decisore a soglie con soglie ± 0.5.

4.13 Il segnale PAM $s(t) = \sum_i a_i p(t - iT)$, in cui i simboli a_i appartengono all'alfabeto $\{0, \pm 1\}$ e sono equiprobabili ed indipendenti e l'impulso $p(t)$ è $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{rect}(\frac{t-T/2}{T})$, modula in fase a banda stretta, con $\phi_\Delta = 0.1$ rad, una portante di frequenza f_0 e di ampiezza $A_c = 10$ V. Il segnale PM è poi trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

1. Si calcoli la densità spettrale di potenza del segnale $s(t)$ e se ne tracci il grafico.
2. Si indichi una possibile struttura di ricevitore ottimo per i simboli a_i (si assuma $f_0 \gg 1/T$).
3. Si determini il valore delle soglie ottime (che minimizzano cioè la probabilità d'errore) in funzione di N_0.
4. Si determini il valore massimo di N_0 tale per cui la probabilità d'errore sui simboli a_i è al più 10^{-5}.

4.14 Nel sistema di trasmissione PAM riportato in Fig. 4, il segnale $s(t)$ ha espressione $s(t) = \sum_i a_i q(t - iT)$. I simboli a_i possono assumere i valori 0 e 1 con probabilità 0.6 e 0.4 rispettivamente. Il canale $C(f)$ è ideale mentre $q(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right)$. Il rumore $n(t)$ è gaussiano, bianco, con densità spettrale di potenza $N_0/2$

1. Si dimensionino i filtri di trasmissione e ricezione in modo che il sistema sia senza ISI ed abbia banda $1/2T$. Si imponga inoltre che l'energia associata al singolo impulso trasmesso sia E_T.
2. Si determini la strategia del decisore e si calcoli la probabilità d'errore.

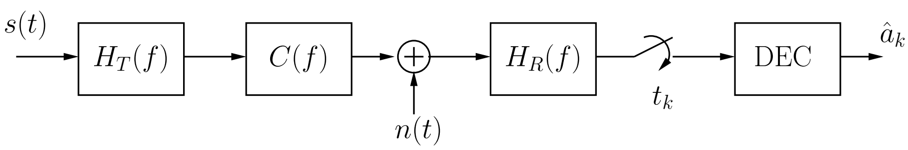

Figura 4: