COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Corsi di Laurea in Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica e Ingegneria delle Telecomunicazioni

Compito del 30/1/2003

1. In un sistema di comunicazione analogico, si vogliono trasmettere due segnali, $s_1(t)$ e $s_2(t)$, di banda $B = 4$ kHz e potenza media $P_s = 1$ V^2, utilizzando lo schema di Fig. 1 in cui $f_p = 8$ kHz, $f_0 = 1$ MHz e $A_0 = 1$ V. Il canale di trasmissione ha banda $B_c = 200$ kHz ed introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 10^{-4}$ V^2/Hz.

   (a) Si disegni lo spettro del segnale $x(t)$ in funzione degli spettri dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ e si ottimizzi il valore della deviazione di frequenza f_Δ del modulatore FM in modo che il segnale $x_{FM}(t)$ occupi tutta la banda di trasmissione.

   (b) Si dimensioni uno schema di demodulazione per i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

   (c) Si calcoli il rapporto segnale-rumore all'uscita dei due rami del demodulatore.

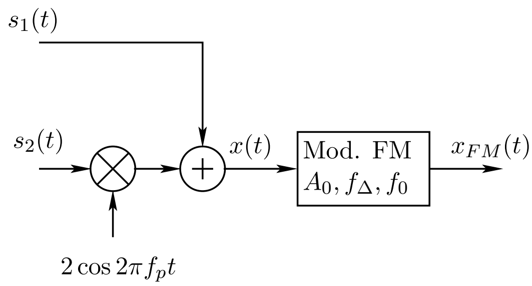

Figura 1:

2. In un sistema di trasmissione PAM in banda base, i simboli a_i emessi dalla sorgente di informazione sono equiprobabili, indipendenti ed appartengono all'alfabeto ternario $\{-1, 0, 1\}$. L'impulso trasmesso $p(t)$ ha spettro a radice di coseno rialzato con *roll-off* $\alpha = 0.25$. Il rumore gaussiano bianco introdotto dal canale ha densità spettrale di potenza $N_0/2$ con $N_0 = \frac{1}{32}$ V^2/Hz.

   (a) Supponendo che il canale sia ideale, si determini la struttura del ricevitore e se ne calcoli la probabilità d'errore sul simbolo.

   (b) Mantenendo inalterato il filtro di ricezione così come dimensionato al punto precedente, nel caso in cui la risposta in frequenza del canale sia

$$C(f) = \begin{cases} 1 + j0.2\sin(2\pi fT) & \text{per } |fT| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   si determini il valore degli interferenti al campionatore.

   (c) Per migliorare le prestazioni del ricevitore si introduce in questo caso un equalizzatore trasversale con due celle di ritardo (3 prese). Si dimensionino le prese dell'equalizzatore secondo il criterio dello *zero-forcing* (si imponga che l'impulso dopo l'equalizzatore assuma valore pari a 1 per $t = T$).

   (d) Si calcolino gli interferenti residui e la varianza dei campioni di rumore dopo l'equalizzatore.

   (e) Si calcoli la probabilità d'errore condizionata $P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\}$ al ricevitore dopo l'inserimento dell'equalizzatore (assumendo sempre di utilizzare lo stesso decisore a soglie del punto (a)).

Risultati e soluzione: *http://(www.tlc.unipr.it/people/colavolpe*

Soluzione:

1. **Esercizio sulle modulazioni analogiche.**

   (a) Poiché è

   $$x(t) = s_1(t) + 2s_2(t)\cos(2\pi f_p t)$$

   lo spettro del segnale $x(t)$ è ovviamente

   $$X(f) = S_1(f) + S_2(f - f_p) + S_2(f + f_p)\,.$$

   Supponendo che gli spettri dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ siano quelli mostrati in Fig. 2(a), lo spettro di $x(t)$ sarà quello mostrato in Fig.2(b). L'espressione della banda del segnale FM

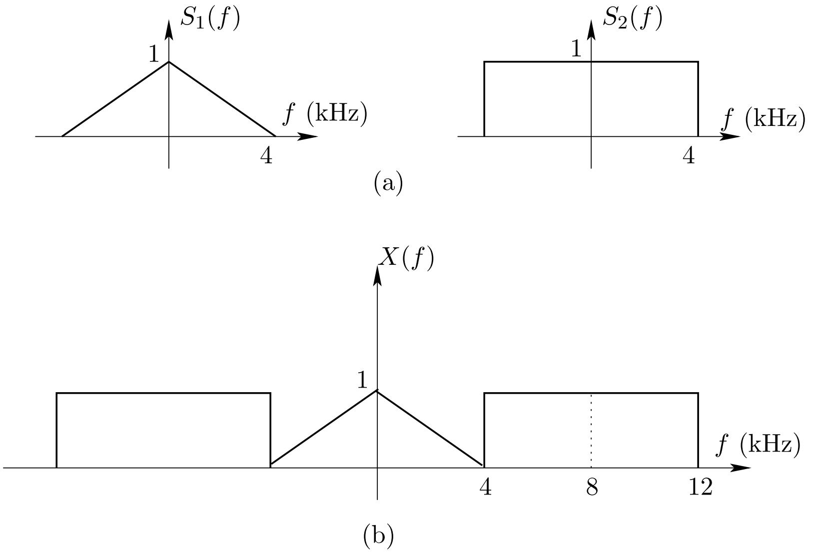

Figura 2:

   è

   $$B_{FM} \simeq 2(f_\Delta + 2B_x)$$

   dove $B_x = 12$ kHz è la banda del segnale $x(t)$. Per ottenere $B_{FM} = B_c = 200$ kHz è quindi necessario scegliere

   $$f_\Delta = \frac{B_c}{2} - 2B_x = 76\,\mathrm{kHz}\,.$$

   (b) Lo schema di demodulazione sarà costituito da un demodulatore FM seguito da un ulteriore schema per estrarre i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$, come mostrato in Fig. 3. Il filtro $H_1(f)$ è un filtro passa banda, di banda B_c e centrato intorno alla frequenza f_0. Tale filtro serve per eliminare le componenti di rumore al di fuori della banda del segnale $x_{FM}(t)$. Il filtro $H_2(f)$ è invece un filtro passa basso di banda $B = 4$ kHz.

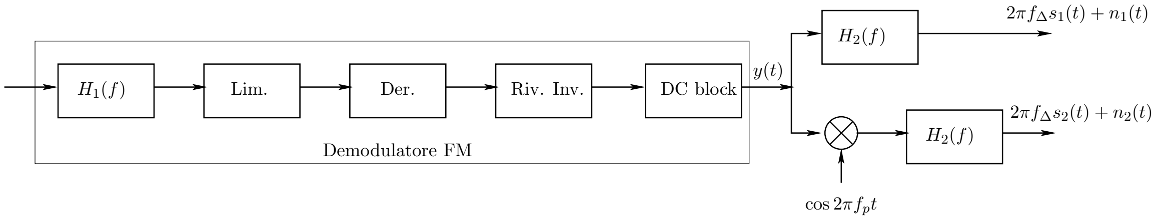

Figura 3:

(c) Il segnale $y(t)$ all'uscita del demodulatore FM può essere espresso come

$$y(t) = A_L \left[2\pi f_\Delta x(t) + \frac{1}{A_0} \frac{dn_s(t)}{dt} \right]$$

dove A_L è l'ampiezza del limitatore e $n_s(t)$ è la componente in quadratura del rumore passa banda presente dopo il filtro $H_1(f)$. Assumendo $A_L = 1$ V (tale ipotesi non lede la generalità dal momento che non viene modificato il rapporto tra la potenza del segnale e quella del rumore) e poiché $A_0 = 1$ V, si ha

$$y(t) = 2\pi f_\Delta x(t) + \frac{dn_s(t)}{dt} = 2\pi f_\Delta x(t) + n_3(t)\,.$$

La densità spettrale di potenza del rumore $n_3(t)$ è

$$S_{n_3}(f) = \begin{cases} 4\pi^2 N_o f^2 & \text{per } |f| \leq B_x \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Pertanto, in uscita dal ramo superiore del demodulatore si avrà il segnale

$$z_1(t) = 2\pi f_\Delta s_1(t) + n_1(t)$$

dove $n_1(t)$ è un processo di rumore ottenuto filtrando con il filtro $H_2(f)$ il processo di rumore $n_3(t)$. Il processo $n_1(t)$ ha pertanto densità spettrale di potenza

$$S_{n_1}(f) = \begin{cases} 4\pi^2 N_o f^2 & \text{per } |f| \leq B \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Il rapporto segnale-rumore su tale ramo è pertanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{4\pi^2 f_\Delta^2 P_s}{\int_{-B}^{B} S_1(f)\,df} = \frac{3 f_\Delta^2 P_s}{2 N_0 B^3} \simeq 31.3\,\text{dB}\,.$$

Per quanto riguarda invece il ramo inferiore, poiché

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\pi f_\Delta x(t) + n_3(t) \\ &= 2\pi f_\Delta [s_1(t) + 2 s_2(t)\cos(2\pi f_p t)] + n_{c3}(t)\cos(2\pi f_p t) - n_{s3}(t)\sin(2\pi f_p t) \end{aligned}$$

dove si sono indicate con $n_{c3}(t)$ e con $n_{s3}(t)$ le componenti in fase e quadratura di $n_3(t)$ rispetto alla frequenza f_p, il segnale dopo la conversione in banda base può essere espresso come

$$z_2(t) = 2\pi f_\Delta s_2(t) + \frac{n_{c3}(t)}{2}$$

(in Fig. 3 si è indicato $n_2(t) = n_{c3}(t)/2$). La densità spettrale di potenza del processo $n_{c3}(t)$ è, come è noto,

$$S_{n_{c3}}(f) = [S_{n_3}(f - f_p) + S_{n_3}(f + f_p)] H_2(f)\,.$$

Pertanto

$$\left(\frac{S}{N}\right)_2 = \frac{4\pi^2 f_\Delta^2 P_s}{\frac{1}{4}\int_{-B}^{B} S_{n_{c3}}(f)\,df} = \frac{3 f_\Delta^2 P_s}{13 N_0 B^3} \simeq 23.2\,\text{dB}\,.$$

2. **Esercizio sulle modulazioni numeriche.**

(a) Il filtro di ricezione $h_R(t)$ deve essere adattato all'impulso ricevuto (che è poi quello trasmesso se il canale è ideale), e cioè all'impulso $p(t)$. La convoluzione dell'impulso ricevuto e della risposta impulsiva del filtro di ricezione è un impulso di Nyquist $g_N(t)$ con spettro $G_N(f)$ a coseno rialzato (con $\alpha = 0.5$). Quindi, non si ha ISI ed il ricevitore ottimo è costituito, oltre che dal filtro adattato, da un campionatore e da un decisore a soglie. Supponendo che sia $g_N(0) = 1$, le soglie valgono $\pm 1/2$. Per tale ricevitore, il campione all'uscita del filtro adattato all'istante kT vale

$$x_k = a_k + n_{1k}$$

dove n_{1k} è una variabile casuale gaussiana a valor medio nullo e varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} g_N(0) = \frac{N_0}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k\} &= \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\} \\ &= \frac{2}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} + \frac{1}{3}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} \end{aligned}$$

visto che, per simmetria, $P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} = P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\}$. Poiché

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} &= P\{x_k > -\frac{1}{2} | a_k = -1\} = P\{-1 + n_{1k} > -\frac{1}{2}\} = P\{n_{1k} > \frac{1}{2}\} \\ &= \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right) \end{aligned}$$

e analogamente

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = 2\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

si ha

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{4}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{4}{3}\mathrm{Q}(4) = 4 \cdot 10^{-5}\,.$$

(b) La risposta in frequenza del canale può essere espressa come

$$\begin{aligned} C(f) &= [1 + j0.2\sin(2\pi fT)]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right) = \left[1 + j0.2\left(\frac{e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}}{2j}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right) \\ &= \left[1 + 0.1\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{fT}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Pertanto, l'impulso $g(t)$ all'uscita del filtro $h_R(t)$ ha ora spettro

$$G(f) = H_T(f)C(f)H_R(f) = G_N(f)\left[1 + 0.1\left(e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)\right]$$

e quindi

$$g(t) = g_N(t) + 0.1g_N(t+T) - 0.1g_N(t-T)\,.$$

Pertanto

$$g(kT) = g_N(kT) + 0.1g_N[(k+1)T] - 0.1g_N[(k-1)T] = \delta_k + 0.1\delta_{k+1} - 0.1\delta_{k-1}$$

e quindi

$$x_k = a_k + 0.1a_{k+1} - 0.1a_{k-1} + n_{1k}\,.$$

Si noti che il rumore non è cambiato, non essendo cambiato il filtro di ricezione.

(c) L'impulso $q(t)$ all'uscita dell'equalizzatore può essere espresso come

$$q(t) = c_0 g(t) + c_1 g(t-T) + c_2 g(t-2T)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} q(kT) &= c_0 g(kT) + c_1 g[(k-1)T] + c_2 g[(k-2)T] \\ &= 0.1c_0\delta_{k+1} + (c_0 + 0.1c_1)\delta_k + (-0.1c_0 + c_1 + 0.1c_2)\delta_{k-1} \\ &\quad + (-0.1c_1 + c_2)\delta_{k-2} - 0.1c_2\delta_{k-3}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo le condizioni

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \end{cases}$$

dalla (1) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_0 + 0.1c_1 = 0 \\ -0.1c_0 + c_1 + 0.1c_2 = 1 \\ -0.1c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

che risolto fornisce

$$\begin{cases} c_0 \simeq -0.1 \\ c_1 \simeq 0.98 \\ c_2 \simeq 0.1 \end{cases}$$

(d) Sostituendo nella (1) i valori calcolati delle prese si ottiene

$$\begin{cases} q(-T) \simeq -0.01 \\ q(0) = 0 \\ q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \\ q(3T) \simeq -0.01 \end{cases}$$

(gli altri campioni di $q(kT)$ sono ovviamente nulli). Il rumore $n_2(t)$ dopo l'equalizzatore può essere espresso in funzione del rumore $n_1(t)$ prima dell'equalizzatore come

$$n_2(t) = c_0 n_1(t) + c_1 n_1(t-T) + c_2 n_1(t-2T)\,. \tag{2}$$

Poiché l'autocorrelazione del processo $n_1(t)$ è $R_1(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \otimes h_R(\tau) \otimes h_R(-\tau) = \frac{N_0}{2} g_N(\tau)$, è possibile calcolare immediatamente, dalla (2), la varianza σ_2^2 del processo $n_2(t)$ (che, essendo il processo a media nulla, coincide col valor quadratico medio):

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= E\{n_2^2(t)\} = E\{[c_0 n_1(t) + c_1 n_1(t-T) + c_2 n_1(t-2T)]^2\} \\ &= c_0^2 E\{n_1^2(t)\} + c_1^2 E\{n_1^2(t-T)\} + c_2^2 E\{n_1^2(t-2T)\} + 2c_0c_1 E\{n_1(t)n_1(t-T)\} \\ &\quad +2c_0c_2 E\{n_1(t)n_1(t-2T)\} + 2c_1c_2 E\{n_1(t-T)n_1(t-2T)\} \\ &= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2)\frac{N_0}{2} \simeq 0.98\frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

essendo $E\{n_1^2(t)\} = E\{n_1^2(t-T)\} = E\{n_1^2(t-2T)\} = \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$, $E\{n_1(t)n_1(t-T)\} = E\{n_1(t-T)n_1(t-2T)\} = R_1(T) = \frac{N_0}{2} g_N(T) = 0$ e $E\{n_1(t)n_1(t-2T)\} = R_1(2T) = \frac{N_0}{2} g_N(2T) = 0$.

(e) Tenendo conto dei risultati dei punti (c) e (d), in presenza dell'equalizzatore il campione y_k all'istante kT del segnale all'uscita dell'equalizzatore può esprimersi come

$$y_k = -0.01a_{k+1} + a_{k-1} - 0.01a_{k-3} + n_{2k}\,.$$

Suppondo di utilizzare tale campione per decidere sul simbolo a_{k-1}, per decidere sul simbolo a_k si utilizzerà il campione

$$y_{k+1} = -0.01a_{k+2} + a_k - 0.01a_{k-2} + n_{2k}\,.$$

La probabilità d'errore condizionata richiesta può calcolarsi, tenendo conto del fatto che i simboli sono indipendenti ed equiprobabili, come

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = \frac{1}{9} \sum_{\alpha\in\{0,\pm1\}} \sum_{\beta\in\{0,\pm1\}} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\}\,. \tag{3}$$

Il generico termine della sommatoria può calcolarsi come

$$
\begin{aligned}
P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} &= P\{y_{k+1} > \frac{1}{2} | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} \\
&\quad + P\{y_{k+1} < -\frac{1}{2} | a_k = 0, a_{k+2} = \alpha, a_{k-2} = \beta\} \\
&= P\{-0.01\alpha - 0.01\beta + n_{2k} > \frac{1}{2}\} \\
&\quad + P\{-0.01\alpha - 0.01\beta + n_{2k} < -\frac{1}{2}\} \\
&= \mathsf{Q}\left(\frac{0.5 + 0.01[\alpha + \beta]}{\sigma_2}\right) \\
&\quad + \mathsf{Q}\left(\frac{0.5 - 0.01[\alpha + \beta]}{\sigma_2}\right) .
\end{aligned}
$$

Pertanto, sostituendo nella (3) otteniamo

$$
P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 0\} = \frac{2}{3}\mathsf{Q}\left(\frac{0.5}{\sigma_2}\right) + \frac{4}{9}\mathsf{Q}\left(\frac{0.51}{\sigma_2}\right) + \frac{2}{9}\mathsf{Q}\left(\frac{0.52}{\sigma_2}\right) + \frac{4}{9}\mathsf{Q}\left(\frac{0.49}{\sigma_2}\right) + \frac{2}{9}\mathsf{Q}\left(\frac{0.48}{\sigma_2}\right) .
$$