COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 20/6/2007

Tempo a disposizione: 3.5 ore

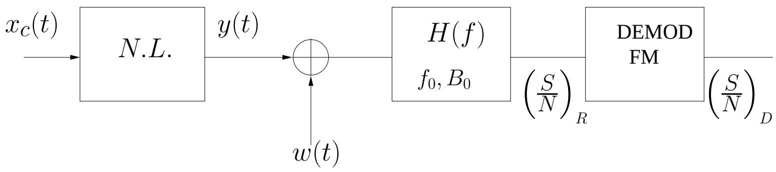

Figura 1: Sistema FM.

1. E' dato il sistema FM mostrato in Fig. 1 dove: il demodulatore FM è ideale; $w(t)$ è un rumore AWGN a media nulla avente densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$ con $N_0 = 10^{-7}$ V^2/Hz; $x_c(t)$ è un segnale FM di ampiezza unitaria e frequenza istantanea $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$, con $f_c = 100$ kHz; $x(t)$ è il messaggio di potenza $S_x = 1$ V^2 e banda $W = 5$ kHz; il blocco $N.L.$ rappresenta una non-linearità con caratteristica ingresso/uscita $y = T[x_c]$ tale per cui $T[\cos\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$ dove a_n risulta:

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n^3 e^{-n}} & n = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   $H(f)$ è un filtro passa banda ideale centrato alla frequenza f_0 e di banda B_0.

   (a) Indicare le regioni frequenziali occupate dallo spettro del segnale $y(t)$;

   (b) Calcolare il massimo valore di f_Δ tale per cui, in assenza del rumore $w(t)$, è possibile recuperare $x(t)$ indistorto dal demodulatore FM, ovvero tale per cui lo spettro di $y(t)$ è composto da porzioni non sovrapposte;

   (c) Dimensionare i valori ottimi di f_0 e B_0 tali per cui il rapporto segnale-rumore $(S/N)_R$ è massimo. Calcolare il conseguente rapporto segnale-rumore $(S/N)_D$.

2. Si consideri il sistema numerico di Fig. 2 dove: $x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT)$, è un segnale PAM avente $a_k \in \{0, 1\}$ simboli indipendenti con probabilità $P\{a_k = 0\} = \frac{1}{3}$ e $P\{a_k = 1\} = \frac{2}{3}$; il canale di trasmissione $H_c(f)$ è di banda B ed ha uguale funzione di trasferimento del filtro $H(f)$, $H_c(f) = H(f)$; il ricevitore rivela il modulo del segnale al suo ingresso, $q(t) = |y(t)|$; la decisione sui simboli trasmessi è fatta tramite un decisore a soglia con soglia di decisione θ; $w(t)$ è un rumore AWGN avente media nulla e densità spettrale di potenza bilatera pari a $N_0/2$.

   (a) Tenendo conto del vincolo sulla banda B, si dimensioni il filtro di ricezione $H(f)$ in modo tale che il segnale $y(t)$ sia un segnale PAM con impulsi di Nyquist a forma di coseno rialzato aventi roll-off $0.5\,(50\%)$;

   (b) Si calcoli la densità spettrale di potenza del segnale rumoroso $y(t)$;

   (c) Si calcoli la probabilità di errore del segnale all'uscita del decisore a soglia.

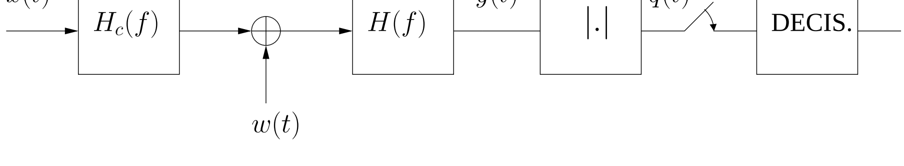

Figura 2: Sistema PAM in banda base.

Soluzione parte analogica

1. Il segnale ricevuto è $x_c(t) = \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int x(\lambda)d\lambda\right)$. Dopo la non linearità si ha $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ dove

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sqrt{2e^{-1}}\cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_{\Delta 1}\int x(\lambda)d\lambda\right) \\ y_2(t) &= \sqrt{8e^{-2}}\cos\left(2\pi 2 f_c t + 2\pi f_{\Delta 2}\int x(\lambda)d\lambda\right) \\ y_3(t) &= \sqrt{27e^{-3}}\cos\left(2\pi 3 f_c t + 2\pi f_{\Delta 3}\int x(\lambda)d\lambda\right) \end{aligned}$$

dove $f_{\Delta k} = k f_\Delta$, $k = 1, 2, 3$. In frequenza si hanno quindi tre segnali centrati a f_c, $2f_c$, $3f_c$, rispettivamente.

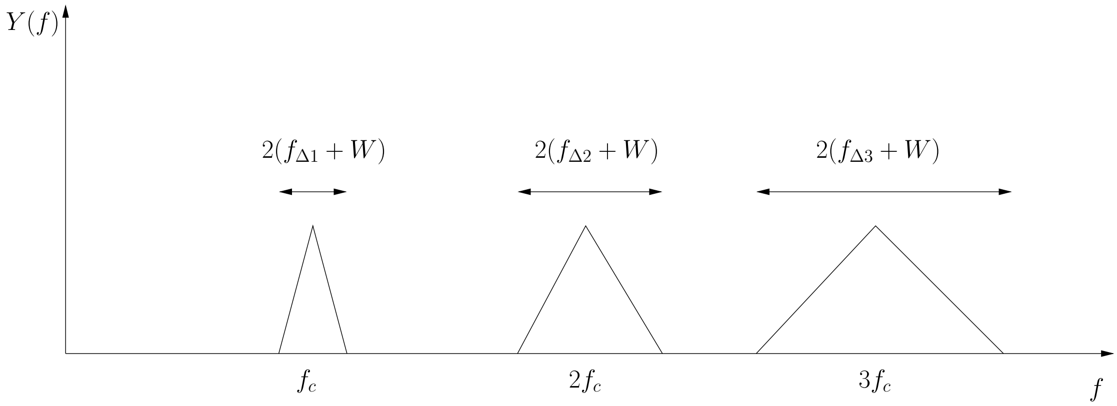

Figura 3: Spettro di $y(t)$.

2. In assenza di rumore $w(t)$ l'unico disturbo può provenire dalla sovrapposizione delle code degli spettri. Assumendo che la banda del segnale FM $x_c(t)$ è $B_{FM} = 2\left(f_\Delta + W\right)$, la banda del generico $y_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, è $B_k = 2\left(f_{\Delta k} + W\right)$. Occorre quindi imporre le seguenti:

$$\begin{cases} f_c + \frac{2(f_{\Delta 1}+W)}{2} < 2f_c - \frac{2(f_{\Delta 2}+W)}{2} \\ 2f_c + \frac{2(f_{\Delta 2}+W)}{2} < 3f_c - \frac{2(f_{\Delta 3}+W)}{2} \end{cases}$$

dalle quali si deduce che $D = f_\Delta/W$ deve soddisfare:

$$\begin{cases} D < \frac{1}{3}\left(\frac{f_c}{W} - 2\right) = 6 \\ D < \frac{1}{5}\left(\frac{f_c}{W} - 2\right) = 3.6 \end{cases}$$

La prima ($D < 6$) vale se il demodulatore estrae il segnale ad f_c, la seconda se estrae il segnale a $2f_c$ o a $3f_c$.

3. La banda ottima di B_o è la minima necessaria per far passare una delle repliche del segnale nello spettro di $y(t)$. Tuttavia occorre decidere quale ricevere. Il rapporto segnale rumore prima del demodulatore è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{A_c^2}{2N_0 B_o}$$

dove A_c è l'ampiezza del segnale FM estratto dal filtro $H(f)$. Risulta $A_c = \sqrt{n^3 e^{-n}}$ per $n = 1, 2, 3$, per cui si hanno le seguenti possibilità a seconda di dove si centra il filtro:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \begin{cases} \frac{1e^{-1}}{2N_o 2(D+1)W} = 16.11 \text{ dB} & f_0 = f_c \\ \frac{8e^{-2}}{2N_o 2(2D+1)W} = 18.30 \text{ dB} & f_0 = 2f_c \\ \frac{27e^{-3}}{2N_o 2(3D+1)W} = 17.67 \text{ dB} & f_0 = 3f_c \end{cases}$$

Ne risulta che il miglior segnale è quello centrato attorno $2f_c$. Il conseguente rapporto segnale rumore all'uscita risulta $\left(\frac{S}{N}\right)_D = 3D^2 S_x \frac{B}{W}\left(\frac{S}{N}\right)_R = 46$ dB.

Soluzione parte digitale

1. Il segnale $y(t)$ in assenza di rumore è:

$$y(t) = y_s(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

dove $P(f) = \mathcal{F}\left\{p(t)\right\} = H_c(f)H(f)$. Per soddisfare la richiesta si sceglie $H(f) = \sqrt{P(f)}$ dove $P(f)$ è lo spettro di un coseno rialzato avente roll-off $\alpha = 0.5$.

2. In presenza di rumore si ha:

$$y(t) = y_s(t) + n(t)$$

dove $n(t) = w(t) * h(t)$, e $h(t) = \mathcal{F}\left\{H(f)\right\}$. Essendo $y_s(t)$ e $n(t)$ indipendenti con $n(t)$ a media nulla, la densità spettrale di potenza di $y(t)$ è la somma delle densità spettrali di potenza di $y_s(t)$ e di $n(t)$. Risulta:

$$G_y(f) = G_{y_s}(f) + G_n(f)$$

con:

$$\begin{aligned} G_{y_s}(f) &= \sigma_a^2 R\left|P(f)\right|^2 + (m_a R)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|P(kR)\right|^2 \delta\left(f - kR\right) \\ G_n(f) &= \frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2 = \frac{N_0}{2} P(f) \end{aligned}$$

dove $m_a = \mathrm{E}\left\{a_k\right\} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, mentre $\sigma_a^2 = \mathrm{E}\left\{a_k^2\right\} - m_a^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$. Nella densità spettrale di potenza sarà presente la sola delta di Dirac ad $f = 0$ in modo da soddisfare la condizione che $y(t)$ è dotato di impulsi di Nyquist.

3. Il segnale all'uscita del blocco di modulo risulta:

$$z = \left|y_s(t) + n(t)\right|$$

La probabilità di errore risulta:

$$P\left\{\text{errore}\right\} = P\left\{z < \theta | y_s\left(t_k\right) = 1\right\} P\left\{y_s\left(t_k\right) = 1\right\} + P\left\{z > \theta | y_s\left(t_k\right) = 0\right\} P\left\{y_s\left(t_k\right) = 0\right\}$$

Risulta:

$$P\left\{\text{errore}\right\} = P\left\{\left|1 + n\left(t_k\right)\right| < \theta\right\} \frac{2}{3} + P\left\{\left|n\left(t_k\right)\right| > \theta\right\} \frac{1}{3}$$

dove l'autocorrelazione del processo stocastico $n(t)$, stazionario per ipotesi, è:

$$R_n(t) = E\left\{n(t)n(t-\tau)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2\right\} = \frac{N_0}{2} p(\tau)$$

Risulta $R_n(0) = \frac{N_0}{2} p(0) = \frac{N_0}{2}$ e $R_n(T) = 0$ in quanto $p(t)$ è un impulso di Nyquist. Di conseguenza la variabile casuale gaussiana $n(t_k)$ possiede media nulla e varianza $\sigma^2 = R_n(0)$. I vari termini della probabilità di errore sono:

$$\begin{aligned} P\left\{z < \theta | y_s\left(t_k\right) = 1\right\} &= P\left\{-\theta - 1 < n\left(t_k\right) < \theta - 1\right\} = Q\left(\frac{1-\theta}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1+\theta}{\sigma}\right) \\ P\left\{z > \theta | y_s\left(t_k\right) = 0\right\} &= P\left\{\left|n\left(t_k\right)\right| > \theta\right\} = 2Q\left\{\frac{\theta}{\sigma}\right\} \end{aligned}$$

In definitiva la probabilità di errore risulta:

$$P\left\{\text{errore}\right\} = \left[Q\left(\frac{1-\theta}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1+\theta}{\sigma}\right)\right] \frac{2}{3} + 2Q\left(\frac{\theta}{\sigma}\right) \frac{1}{3}$$