Controlli digitali

Esercizi sulle antitrasformate zeta

Calcola l'antitrasformata zeta delle seguenti funzioni, usando sia il metodo per scomposizione in fratti semplici, sia quello attraverso l'integrale di inversione.

a) $X(z) = \frac{2z^3+z}{(z-2)^2(z-1)}$
b) $X(z) = \frac{z+2}{(z-2)z^2}$
c) $X(z) = \frac{z}{z^2+0.25}$
d) $X(z) = \frac{z^{-10}}{z-1}$
e) $X(z) = \frac{z}{((z-3)^2+16)(z-2)}$
f) $X(z) = \frac{z}{((z-2)^2+9))^2}$

Risposte

a) Usiamo prima il metodo della scomposizione in fratti semplici.

Possiamo scrivere $X(z)$ nel seguente modo

$$X(z) = C_0 + \frac{C_{1,1}}{z-2} + \frac{C_{1,2}}{(z-2)^2} + \frac{C_{2,1}}{z-1}$$

dove

$$C_0 = \lim_{z\to\infty} X(z) = 2,\ C_{2,1} = X(z)(z-1)|_{z=1} = 3\ , C_{1,2} = X(z)(z-2)^2|_{z=2} = 18;$$
$$C_{1,1} = \frac{d}{dz}(X(z)(z-2)^2)|_{z=2} = \frac{(6z^2+1)(z-1)-2z^3-z}{(z-1)^2}|_{z=2} = 7\ .$$

Osservando che

$$\mathcal{Z}^{-1}[\frac{1}{z-a}] = (a)^{k-1}1(k-1),\ \mathcal{Z}^{-1}[\frac{1}{(z-a)^2}] = (k-1)a^{k-2}1(k-1)$$

si ottiene

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[2 + \frac{-15\,z + 10\,z^2 + 8}{(z-2)^2\,(z-1)}] =$$
$$= 2\delta(k) + 3\cdot 1(k-1) + 7\cdot 2^{k-1}1(k-1) + 18\cdot 2^{k-2}(k-1)1(k-1) =$$
$$= 2\delta(k) + (3 + 9\cdot 2^{k-1}(k-1) + 7\cdot 2^{k-1})1(k-1) = 2\delta(k) + (3 - 2^k + 9k\cdot 2^{k-1})1(k-1)$$

Invece, con il metodo dell'integrale di inversione abbiamo che

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma X(z)z^{k-1}dz = \sum \mathrm{Res}(X(z)z^{k-1})$$

osserviamo che $X(z)z^{k-1} = \frac{z^k\left(2\,z^2+1\right)}{(z-2)^2(z-1)}$ ha sempre due poli in 1 e 2, indipendentemente da k (questo perchè la $X(z)$ ha un polo nell'origine), da cui

$$X(z) = \mathrm{Res}(X(z)z^{k-1},1) + \mathrm{Res}(X(z)z^{k-1},2) = X(z)z^{k-1}(z-1)|_{z=1} + \frac{d}{dz}(X(z)z^{k-1})|_{z=2} =$$
$$= \frac{z^k\left(2\,z^2+1\right)}{(z-2)^2}|_{z=1} + \frac{z^{k-1}\left(2\,z^3 - 4\,z^2 - z + 2\,z^3k - 2\,z^2k + k\,z - k\right)}{(z-1)^2}|_{z=2} =$$
$$= 3 - 2^k + 9\cdot 2^{k-1}k$$

il risultato è valido per $k \geq 0$, si può verificare facilmente che questa espressione coincide con la precedente.

b)Dalla scomposizione in fratti semplici risulta

$$X(z) = \frac{C_{1,1}}{z-2} + \frac{C2,1}{z} + \frac{C_{2,2}}{z^2}$$

dove $C_{1,1} = \text{Res}(X(z), 2) = 1$, $C_{2,2} = (x(z)z^2)|_{z=0} = -1$, inoltre la somma dei residui deve essere 0 visto che la differenza dei gradi del numeratore e del denominatore è maggiore di 1, quindi $C_{2,1} = \text{Res}(X(z), 0) = -C_{1,1} = -1$. Dato che per il teorema di traslazione $\mathcal{Z}^{-1}[\frac{1}{z^a}] = \delta(k-a)$, antitrasformando termine per termine otteniamo

$$x(k) = 2^{k-1} \cdot 1(k-1) - \delta(k-1) - \delta(k-2)$$

Con l'integrale di inversione

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint \gamma X(z) z^{k-1} dz = \sum \text{Res}(\frac{(z+2)\, z^{k-3}}{z-2})$$

in questo caso i poli della funzione $X(z)z^{k-1} = \frac{(z+2)z^{k-3}}{z-2}$ variano al variare di k, dobbiamo distinguere i seguenti casi

- se $k = 0$ abbiamo un polo di ordine 3 in 0 e un polo semplice in 2
- se $k = 1$ abbiamo un polo di ordine 2 in 0 e un polo semplice in 2
- se $k = 2$ abbiamo un polo di ordine 1 in 0 e un polo semplice in 2
- se $k > 2$ abbiamo solo un polo semplice in 2

per $k = 0$ e $k = 1$ l'ordine del denominatore di $X(z)z^{k-1}$ supera di almeno 2 quello del numeratore, quindi la somma dei residui è 0, per $k = 2$ l'ordine del denominatore supera di 1 quello del numeratore, la somma dei residui è quindi uguale al rapporto tra i coefficienti di grado massimo del numeratore e del denominatore, cioè 1, per $k > 2$

$$x(k) = \text{Res}(X(z)z^{k-1}, 2) = (z+2)\, z^{k-3}|_{z=2} = 2^{k-1}$$

quindi, riassumendo

$$x(k) = \begin{cases} 0 \text{ se } k = 0 \\ 0 \text{ se } k = 1 \\ 1 \text{ se } k = 2 \\ 2^{k-1} \text{ se } k > 2\ , \end{cases}$$

si verifica per confronto che questa espressione coincide con quella ottenuta con la scomposizione in fratti semplici.

c) Con la scomposizione in fratti semplici, osservando che il denominatore ha due poli semplici in $\pm 0.5j$, possiamo scrivere

$$X(z) = \frac{0.5}{z - 0.5j} + \frac{0.5}{z + 0.5j}$$

da cui otteniamo

$$x(k) = 0.5(-0.5j)^{k-1}1(k-1) + 0.5(0.5j)^{k-1}1(k-1) = 0.5^{k-1}0.5(e^{-j\frac{\pi}{2}(k-1)} + e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)})1(k-1) =$$
$$= 0.5^{k-1}\cos(\frac{\pi}{2}(k-1))1(k-1),$$

in cui si è usata la forma trigonometrica dei numeri complessi, cioè

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \ , \quad -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \ .$$

Con il metodo dell'integrale di inversione scriviamo

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma X(z)z^{k-1}dz = \sum \mathrm{Res}(4\,\frac{z^k}{4\,z^2+1}) \ ,$$

l'espressione ha due poli in $\pm 0.5j$, quindi

$$x(k) = 0.5\left((0.5j)^{k-1} + (-0.5j)^{k-1}\right) = 0.5^{k-1}\cos(\frac{\pi}{2}(k-1))$$

l'espressione concide con la precedente. Il termine $1(k-1)$ che compare in più nell'espressione calcolata con i fratti semplici non interviene perchè comunque $\cos(-\pi/2) = 0$.

Nota che il risultato avrebbe potuto anche essere dedotto direttamente dalle tabelle delle trasformate zeta.

d) In questo caso il metodo di antitrasformazione più diretto consiste nell'applicazione del teorema della traslazione nel tempo:

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)](k) = \mathcal{Z}^{-1}[\frac{z}{z-1}](k-11) = 1(k-11)$$

si tratta quindi di un gradino ritardato. Con l'integrale di inversione

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma (X(z)z^{k-1})dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^{-11+k}}{z-1})$$

per $k < 11$ la funzione ha un polo in 1 e un polo di ordine $(11-k)$ in 0, la somma dei residui è 0 perchè la differenza tra i gradi del denominatore e del numeratore è maggiore di 1, se $k \geq 11$

$$x(k) = 1^{-11+k} = 1$$

quindi si ottiene lo stesso risultato rispetto al metodo precedente.

e) Antitrasformiamo $X(z) = \frac{z}{((z-3)^2+16)(z-2)}$ con il metodo dei residui.

Consideriamo la funzione

$$x(z)z^{k-1} = \frac{z^k}{((z-3)^2+16)(z-2)} = \frac{z^k}{(z-3-4j)(z-3+4j)(z-2)} \ ,$$

che ha poli in 2, $3 \pm 4j$, per qualsiasi valore di $k \geq 0$. Sommando i tre residui associati abbiamo che

$$x(k) = \frac{2^k}{17} + \frac{(3+4j)^k}{8j(1+4j)} + \frac{(3-4j)^k}{-8j(1-4j)} \ ,$$

in modo da scrivere questo segnale in forma reale, scriviamo i numeri complessi in rappresentazione in modulo e fase

$$x(k) = \frac{2^k}{17} + \frac{5^k}{8\sqrt{17}}e^{j(\arctan(4/3)k-\pi/2-\arctan(4))} + \frac{5^k}{8\sqrt{17}}e^{-j(\arctan(4/3)k-\pi/2-\arctan(4))} \ ,$$

da cui, riconoscendo la forma esponenziale del coseno,

$$x(k) = \frac{2^k}{17} + \frac{5^k}{4\sqrt{17}}\cos(\arctan(4/3)k - \pi/2 - \arctan(4)) \ .$$

f)Fattorizziamo $X(z)$ come

$$X(z) = \frac{z}{(z-2+3j)^2(z-2-3j)^2} \ ,$$

otteniamo quindi

$$x(k) = \sum \text{Res } (\frac{z^k}{(z-2+3j)^2(z-2-3j)^2}) \ ,$$

questa funzione ha poli in $-2 \pm 3j$, per tutti i $k > 0$. Per semplificare i calcoli possiamo sfruttare la proprietà che per funzioni razionali fratte a coefficienti reali, i residui associati a poli complessi coniugati sono tra loro complessi coniugati, cioè in questo caso

$$\text{Res}(2+3j, x(z)z^{k-1}) = \text{Res}(2-3j, x(z)z^{k-1})))^* \ ,$$

dove $*$ indica il coniugato. Inoltre abbiamo che per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$, $z + z^* = 2\text{Re}\{z\}$, dove $\text{Re}\{z\}$ indica la parte reale di z. Quindi

$$\begin{aligned}
x(k) = 2\text{Re}\{\text{Res}(2+3j, x(z)z^{k-1})\} &= 2\text{Re}\{\frac{d}{dz}\frac{z^k}{(z-2+3j)^2}\} = \\
&= 2\text{Re}\{\frac{-2j(2+3j)^k - 6k(2+3j)^{k-1}}{36 \cdot 6}\} = \\
&= 2\text{Re}\{\frac{-2j\sqrt{13}^k[\cos(k \arctan(3/2)) + j\sin(k \arctan(3/2))]}{36 \cdot 6} + \\
&+ \frac{6k\sqrt{13}^{k-1}[\cos((k-1)\arctan(3/2)) + j\sin((k-1)\arctan(3/2))]}{36 \cdot 6}\} = \\
&= \frac{1}{54}\sqrt{13}^k \sin(k \arctan(3/2)) + k\frac{1}{18}\sqrt{13}^(k-1)\cos(k \arctan 3/2) \ .
\end{aligned}$$