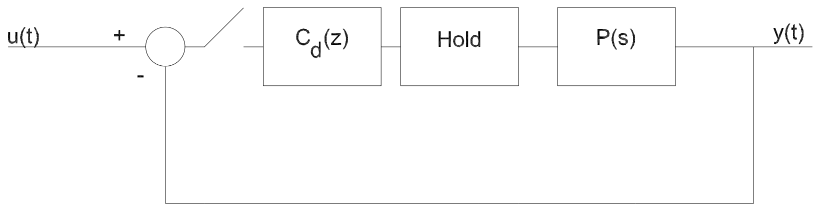
Controlli digitali

Esercizi sulla discretizzazione

1- Progetta un controllore digitale per il seguente sistema



con

$$P(s) = \frac{3}{400} \frac{(2 - s)(s + 200)}{s(s + 2)},$$

assumendo un tempo di campionamento pari a $T = 0.01s$.

Il progetto deve essere fatto per discretizzazione di una rete anticipatrice di struttura

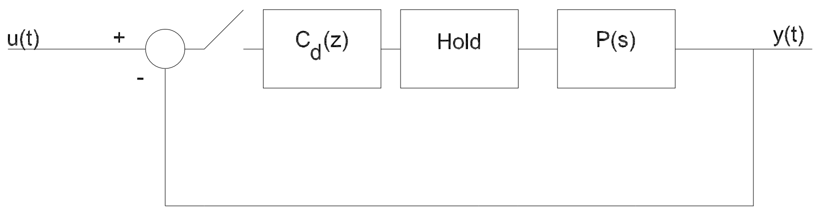
$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} ,$$

scelta in modo da garantire un margine di fase di 40 gradi al sistema continuo, tenendo conto del ritardo di campionamento usando l'approssimazione

$$e^{-\frac{sT}{2}} \simeq \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}} .$$

Il controllore così trovato deve essere poi discretizzato per corrispondenza poli-zeri. Discutere la correttezza del tempo di campionamento fissato.

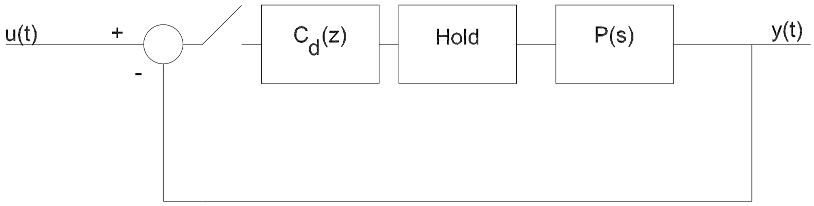
2- Progettare per discretizzazione un controllore per il seguente sistema, utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, in modo che il sistema retroazionato abbia un tempo di assestamento $T_a < 0.5s$ e l'errore a regime in risposta al gradino unitario sia nullo. Per il progetto servirsi del luogo delle radici. Il tempo di campionamento è pari a $T = 0.1s$.



dove

$$P(s) = \frac{s + 3}{s(s + 6)} .$$

3- Progettare un controllore digitale per il sistema



dove

$$P = \frac{2-s}{s+2} \ ,$$

discretizzando con il metodo della trasformazione di Tustin una rete ritardatrice di struttura

$$C(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$$

e fissando il tempo di campionamento a $T = 0.2s$.

Le seguenti specifiche devono essere soddisfatte

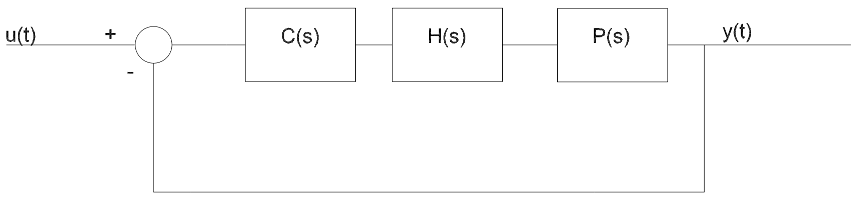
- errore a regime al gradino del 20%
- margine di ampiezza pari a 3.

Risposte

1- Il ritardo finito viene approssimato con

$$H(s) = \frac{1}{1+s\frac{T}{2}} = \frac{1}{1+0.005s} = \frac{200}{s+200},$$

il sistema continuo da considerare è quindi il seguente



Il sistema considerato è di tipo 1. Scritto nella forma delle costanti di tempo diventa

$$PH(s) = 1.5\frac{1-0.5s}{s(s+0.5)}$$

e la funzione di risposta armonica è data da

$$PH(j\omega) = 1.5\frac{1-0.5j\omega}{j\omega(j\omega+0.5)} \ .$$

Il diagramma di Nyquist presenta un asintoto vericale per $\omega \to 0^+$ di posizione

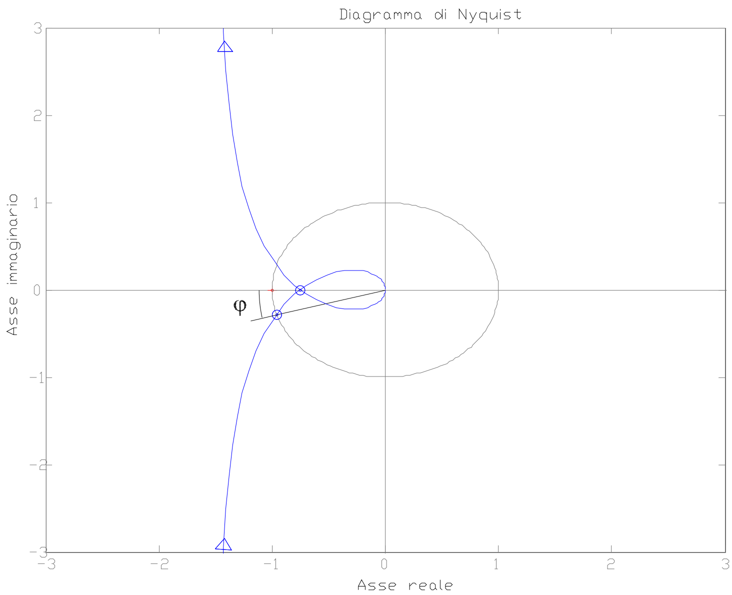
$$\sigma_a = K(\sum_i \tau_i\prime + \sum_i 2\frac{\delta_i\prime}{\omega_{ni}\prime} - \sum_i \tau_i + \sum_i 2\frac{\delta_i}{\omega_{ni}}) = 1.5(-0.5 - 0.5) = -1.5$$

inoltre

$$\arg(L(j\omega)) = -2\arctan(0.5\omega) - \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{\omega\to 0^+} arg(PH(jw)) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{\omega\to\infty} arg(PH(jw)) = -\frac{3\pi}{2}$$

il diagramma di Nyquist compie quindi mezzo giro in senso orario ed è il seguente



troviamo la pulsazione con cui il diagramma di Nyquist interseca in cerchio unitario

$$|PH(j\omega_c)| = 1 \to 1.5\frac{\sqrt{1+0.25\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{1+0.25\omega_c^2}} = 1 \to \omega_c = 1.5\ .$$

Risulta

$$\arg(PH(\jmath\omega_c)) = -2.8578\text{rad} = -163.74°,$$

il margine di fase iniziale è quindi di 16.26°.

Per innalzare il margine di fase usando le formule di inversione, troviamo una pulsazione $\omega_0 > \omega_c$ per cui l'anticipo di fase ottenibile con la rete anticipatrice consenta di avere il margine di fase voluto. Ad esempio prendiamo $\omega_0 = 2$, per cui $\arg(PH(j\omega_0)) = \pi$, l'anticipo di fase richiesto per avere il margine di fase $M_F = 40° = 40\frac{\pi}{180} = 0.6981$rad è dato da

$$\phi_0 = M_F - \arg(P(j\omega_0)) - \pi = 0.6981\ ,$$

inoltre

$$|PH(j\omega_c)| = 0.75$$

quindi il guadagno richiesto è $M = \frac{1}{0.75} = 1.333$. La condizione per l'utilizzo delle formule di inversione è

$$\phi_0 < \arccos(\frac{1}{M}) = 0.7227 ,$$

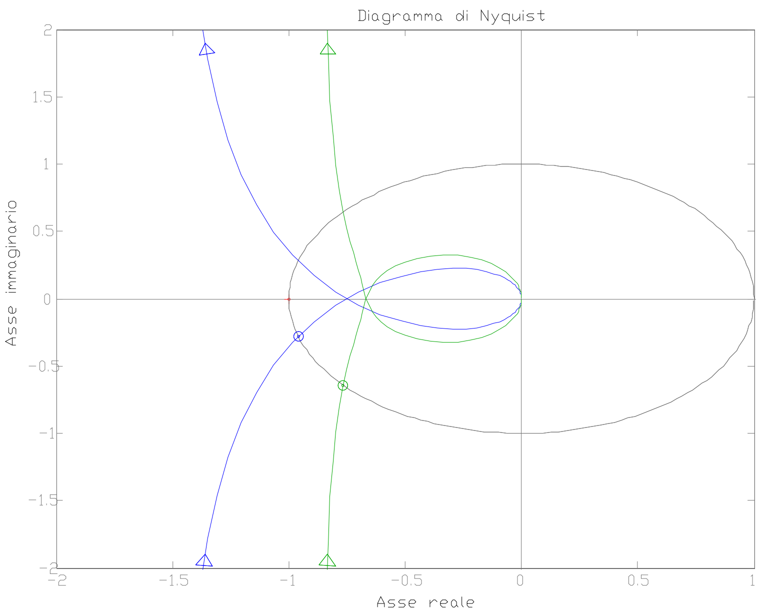
che risulta verificata. Dalle formule di inversione otteniamo dunque

$$\tau = \frac{M - \cos\phi_0}{\omega_0 \sin\phi_0} = 0.4413, \;\; \alpha = \frac{M\cos\phi_0 - 1}{M(M - \cos\phi)} = 0.02828$$

ed il controllore continuo risulta quindi

$$C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s} = \frac{1 + 0.4413s}{1 + 0.01248s} .$$

il grafico seguente mostra in verde il diagramma di Nyquist del guadagno ad anello aperto del sistema controllato $C(s)P(s)H(s)$ ed in blu quello del sistema non controllato $P(s)H(s)$.



Inoltre $C(s)$ ha un polo in $p_1 = -80.13$ e uno zero in $z_1 = -2.266$. Verifichiamo che il tempo di campionamento scelto è compatibile con il controllore da discretizzare. Deve valere la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{4 \cdot 80.13} \simeq 0.01s,$$

da cui possiamo dire che il tempo di campionamento scelto è corretto.

Attraverso la discretizzazione per corrispondenza poli-zeri otteniamo il seguente controllore discreto

$$C_d(z) = K\frac{z - e^{z_1 T}}{z - e^{p_1 T}} = K\frac{z - 0.9776}{z - 0.4488} ,$$

la costante K si determina uguagliando i guadagni statici dei due controllori. $C(s)$ ha guadagno statico unitario, da cui

$$\lim_{z\to 1} C_d(z) = 1 \to K = 24.6 ,$$

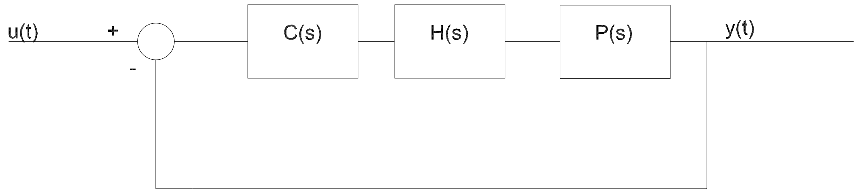
il controllore discretizzato risulta dunque

$$C_d(z) = 24.6\frac{z - 0.9776}{z - 0.4488}\ .$$

2- Il ritardo connesso al campionamento, pari a $\frac{T}{2}$, può essere approssimato con

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s} = \frac{20}{20 + s},$$

il sistema continuo da controllare è dunque

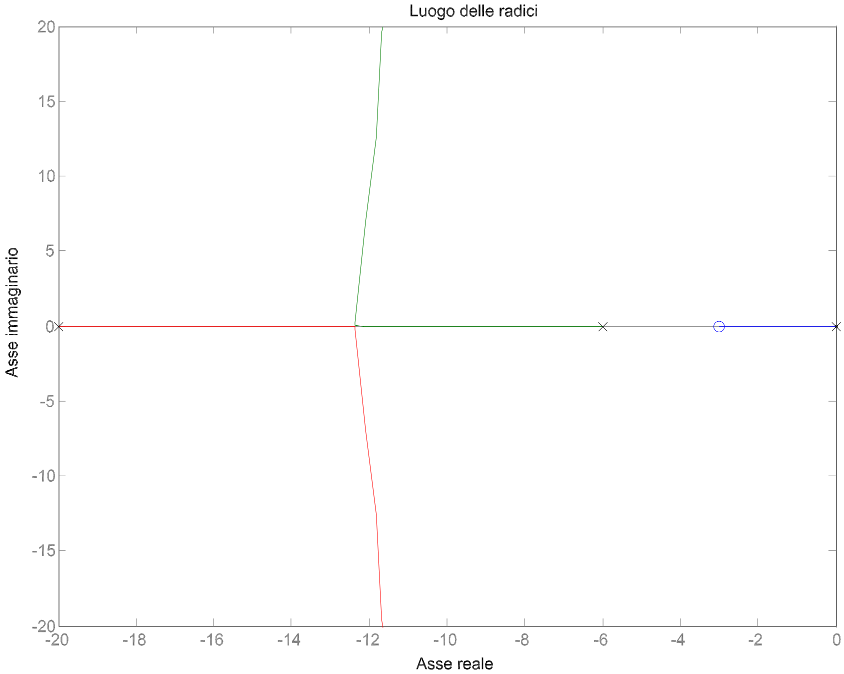


chiamiamo $L(s) = H(s)P(s)$ e costruiamo il luogo delle radici per $L(s)$, seguendo le regole di tracciamento.

Il tempo di assestamento è collegato alla parte reale del polo dominante P_d secondo la relazione approssimata

$$T_a = \frac{3}{\text{Re } P_d},$$

da cui, per soddisfare le specifiche, tutti i poli dovrebbero avere parte reale minore di -6. Costruiamo il luogo delle radici per $1+KL(s)$, usando le regole di tracciamento. Senza controllore il luogo sarebbe il seguente



il sistema è sempre stabile per qualsiasi valore di guadagno K, ma la specifica non viene mai soddisfatta per la presenza del ramo che collega il polo nell'origine con lo zero in -3. Per cambiare la situazione possiamo cancellare il polo il -6 e lo zero in -3, tramite un controllore di struttura

$$C(s) = K\frac{s+6}{s+3},$$

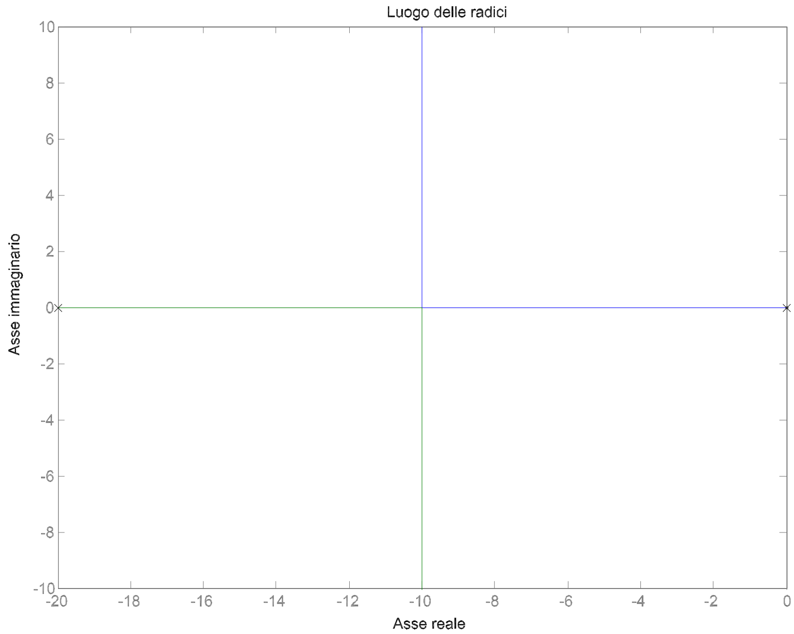
che rappresenta una rete ritadatrice.

Il guadagno di anello risulta $L_2(s) = C(s)L(s) = 20K\frac{1}{s(s+20)}$, le radici doppie del luogo delle radici per $L_2(s)$ si trovano risolvendo l'equazione

$$\sum_i \frac{1}{s-p_i} - \sum_i \frac{1}{s-z_1} \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s+20} = 0\ ,$$

da cui la radice doppia si ha per $s = -10$.

Il luogo delle radici diventa il seguente



Per assegnare il guadagno K in modo da avere tutte le radici a parte reale minore di -6 effettuiamo la sostituzione $w = s - 6$, per cui il polinomio caratteristico diventa

$$s(s+20) + 20K = 0 \rightarrow w^2 + 8w + 20K - 84 = 0 \ ,$$

avere il polo dominante a parte reale minore di -6 equivale a trovare il valore di K per cui il polinomio caratteristico in w è semplicemente stabile. Essendo il polinomio di grado 2 è sufficiente verificare che tutti i coefficienti siano positivi, da cui

$$20K - 84 > 0 \rightarrow K > 4.1,$$

scegliamo ad esempio $K = 5$. Il controllore diventa quindi

$$C(s) = 5\frac{s+3}{s+3} \ .$$

Il controllore discretizzato, secondo il metodo delle differenze in avanti, si ottiene attraverso la sostituzione $s = \frac{z-1}{zT}$, da cui

$$C_d(z) = 5\frac{\frac{z-1}{zT} + 6}{\frac{z-1}{zT} + 3} = 4.1\frac{16z - 10}{13z - 10} = 5.0462\frac{z - 0.6250}{z - 0.7692}$$

Il tempo di campionamento scelto appare appropriato, infatti il polo o zero più veloce del controllore continuo è $s = -6$, da cui

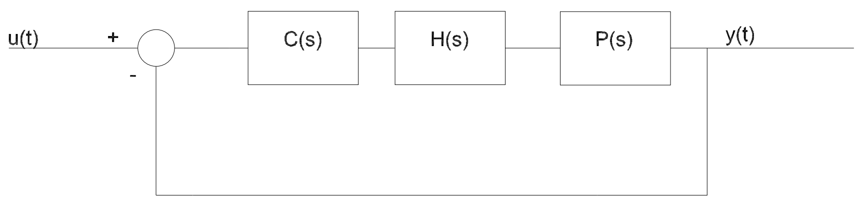
$$T < \frac{\pi}{4 \cdot 6} = 0.1309s \ ,$$

che risulta verificata.

3-Il ritardo finito viene approssimato con

$$H(s) = \frac{1}{1+s\frac{T}{2}} = \frac{1}{1+0.1s} = \frac{10}{s+10},$$

il sistema continuo da considerare è quindi il seguente



Il guadagno ad anello aperto del sistema non controllato è dato dunque da

$$L(s) = 10\frac{2-s}{(s+2)(s+10)}.$$

Dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che

$$0.2 = \frac{1}{1+K_p},$$

da cui $K_p = 4$, il guadagno statico del sistema deve essere quindi uguale a 4, da cui

$$KL(0) = 4 \rightarrow K = 4\ .$$

Costruiamo il diagramma di Nyquist per il guadagno di anello $L_2(s) = 4L(s) = 40\frac{2-s}{(s+2)(s+10)}$. Abbiamo che

$$\arg L_2(j\omega) = -2\arctan(\omega 0.5) - \arctan(\omega 0.1)\ ,$$

da cui $\arg L_2(0) = 0$ e $\lim_{w\rightarrow\infty} \arg L_2(jw) = -\frac{3\pi}{2}$, il guadagno statico è pari a 4, calcoliamo l'intersezione con l'asse reale. Poniamo

$$\mathrm{Im} 40\frac{2-j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+10)} \rightarrow \mathrm{Im} 40\frac{(2-j\omega)(2-j\omega)(10+j\omega)}{(4+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

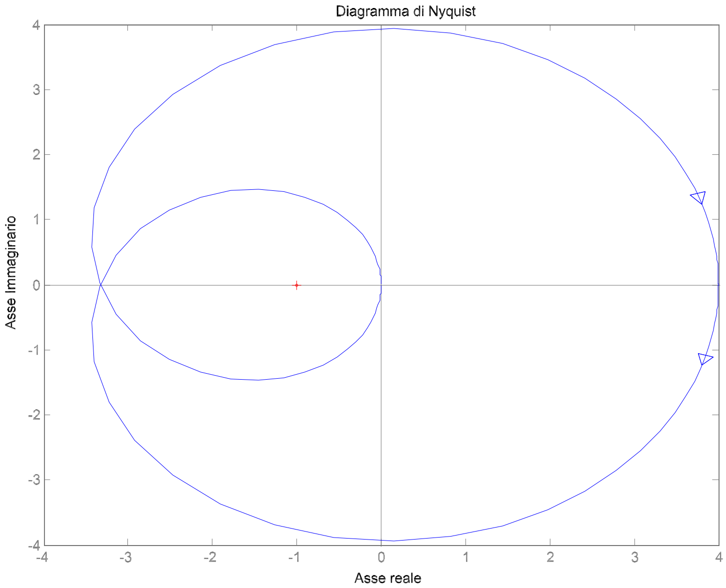
calcoliamo la parte immaginaria del numeratore e poniamola uguale a zero. Risulta

$$\omega^3 - 44\omega = 0\ ,$$

che ha come soluzione $\omega = 0$ e $\omega = 2\sqrt{11} = 6.6332$, da cui la pulsazione critica è $\omega_c = 2\sqrt{11}$. Inoltre

$$|L_2(j\omega_c)| = \frac{10}{3},$$

il sistema è dunque instabile e il diagramma di Nyquist è il seguente.



Per imporre il margine di ampiezza attraverso la rete ritardatrice usiamo le formule di inversione, prendendo ad esempio $\omega_0 = 5\text{rad /s}$ otteniamo

$$\arg L(j\omega_0) = -2.8442 \, , |\arg L(j\omega_0)| = 3.5777 \, ,$$

per imporre il margine di ampiezza voluto, occorre portare questo punto sull'asse reale alla posizione $-\frac{1}{M_a} = -\frac{1}{3}$, da cui $\phi = \arg L(j\omega_c) + \pi = 0.2974$ e $M = \frac{1}{|L(j\omega_c)M_a} = 10.7331$, usando le formule di inversione si ottiene $\alpha = 0.08826$ e $\tau = 6.6737$, il controllore è quindi

$$C(s) = K\frac{1+\tau\alpha s}{1+\alpha s} = 4\frac{1+0.5890s}{1+6.6737s} \, ,$$

i poli e gli zeri del controllore sono dunque in 1.6977 e 0.1498, la condizione per il tempo di campionamento

$$T < \frac{\pi}{4}\frac{1}{1.6977} = 0.4626,$$

è verificata. Il controllore discretizzato con il metodo di Tustin deriva dalla sostituzione $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ e risulta

$$C_d(z) = \frac{0.4069z - 0.2888}{z - 0.9705} \, .$$