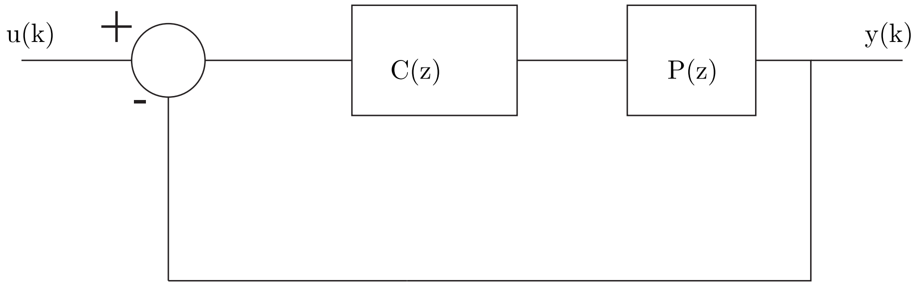
Controlli digitali

Esercizi sul diagramma di Nyquist e sul progetto nel piano w

1- Progetta un controllore digitale per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{z + 0.5}{(z - 0.5)(z - 1)} \ ,$$

in modo da rispettare le seguenti specifiche

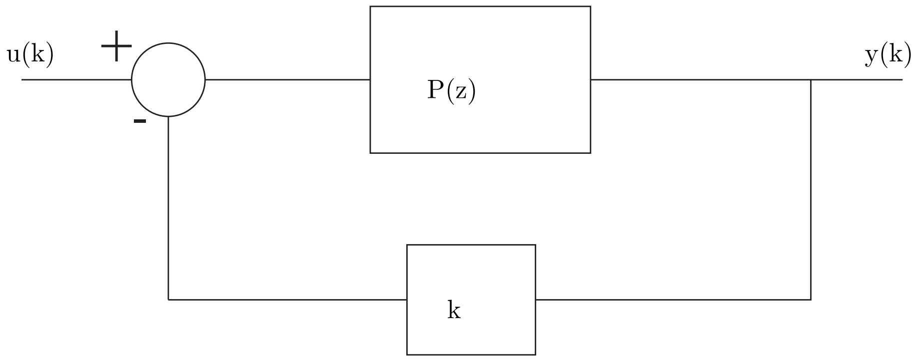
- Errore a regime alla rampa $u(k) = k$ pari a $1/30$
- Margine di ampiezza pari a 4.

Il progetto deve essere ottenuto progettando una rete ritardatrice del tipo

$$C(w) = k\frac{1 + \tau\alpha w}{1 + \tau w}$$

nel piano w, con l'uso della trasformata di Tustin. Assumere il tempo di campionamento pari a 2 secondi.

2- Considera il seguente schema



con

$$P(z) = \frac{z - 2}{(z - 0.5)^3} \ .$$

Disegna il diagramma di Nyquist per il sistema e trova l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Risposte

1-

Passiamo in coordinate w attraverso la trasformazione bilineare, che per $T = 2$ secondi è data da

$$z \to \frac{1+w}{1-w} \ ,$$

da cui

$$P(w) = \frac{(1+w+0.5(1-w))(1-w)}{(1+w-0.5(1-w))(1+w-(1-w))} = \frac{(0.5w+1.5)(1-w)}{(1.5w+0.5)(2w)} = 1.5\frac{(1+1/3w)(1-w)}{w(1+3w)} \ ,$$

Innanzitutto troviamo il guadagno del controllore a partire dalla condizione sull'errore a regime. Possiamo imporre la condizione sull'errore a regime nel dominio w. Il segnale di ingresso è dato da $U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$, passando al dominio w otteniamo

$$U(w) = \frac{(1+w)(1-w)}{4w^2} \ ,$$

l'errore a regime alla rampa è dato da $e_\infty = \lim_{w\to 0} wU(w)\frac{1}{1+P(w)C(w)} = \frac{1}{2\cdot 1.5K}$, da cui, per avere un errore alla rampa pari a $1/30$, abbiamo che $K = 10$ Chiamiamo $P_1(w) = KP(w)$. A questo punto, trovato il guadagno, occorre determinare i parametri della rete ritardatrice per soddisfare la specifica sul margine di fase.

Otteniamo

$$P_1(w) = 10\frac{(1+w+0.5(1-w))(1-w)}{(1+w-0.5(1-w))(1+w-(1-w))} = 10\frac{(0.5w+1.5)(1-w)}{(1.5w+0.5)(2w)} = 15\frac{(1+1/3w)(1-w)}{w(1+3w)} \ ,$$

abbiamo un asintoto verticale di ascissa

$$\sigma = 15(1/3 - 1 - 3) = -55.00$$

sostituendo $w = j\omega_w$, abbiamo

$$\arg P_1(j\omega_w) = \arctan(1/3\omega_w) - \frac{\pi}{2} - \arctan(3\omega_w) \ ,$$

da cui

$$\arg(P_1(0)) = -\pi/2, \ \lim_{\omega_w\to\infty} \arg P_1(j\omega_w) = -\frac{3\pi}{2} \ ,$$

da cui otteniamo che il diagramma di Nyquist compie tre quarti di giro in senso antiorario.

Abbiamo inoltre $\lim_{\omega_w\to\infty} P_1(j\omega_w) = -\frac{35}{3}$, il diagramma di Nyquist compie attorno all'origine un numero di giri in senso antiorario pari alla differenza tra il numero di zeri e il numero di poli di $P(z)$ contenuti all'interno del contorno di Nyquist, pari quindi a -1.

Per trovare le intersezioni del diagramma di Nyquist con l'asse reale consideriamo il polinomio

$$\eta + P_1(w) \to 15(1+1/3w)(1-w) + \eta w(1+3w) = w^2(3\eta - 5) + w(-10+\eta) + 15$$

per avere due radici complesse coniugate dobbiamo annullare il termine di grado 1, ottenendo quindi $\eta = 10$, che rappresenta l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale. Per trovare la pulsazione dell'intersezione sostituiamo η nell'equazione caratteristica, ottenendo

$$w^2 25 + 15 = 0 \to w = j\sqrt{3/5} = j0,774 \ .$$

Il diagramma di Nyquist è rappresentato in Figura 1.

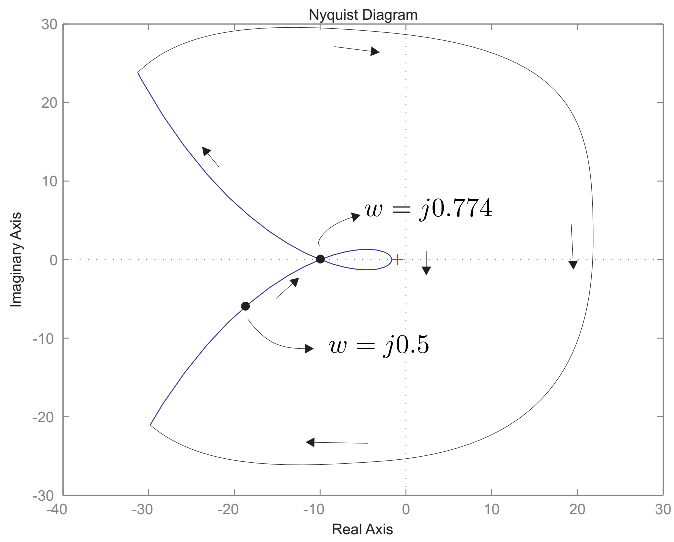


Figura 1: Diagramma di Nyquist

Per imporre il margine di ampiezza voluto, usiamo le formule di inversione. Prendiamo ω_0 di tentativo più piccola di quella critica, ad esempio $\omega_0 = 0.5$, abbiamo

$$|P_1(j0.5)| = 18.86,\ \arg P_1(j0,5) = -2.852$$

l'attenuazione di ampiezza necessaria è pari quindi a $M = 4 \cdot 18.86 = 75.44$ e il ritardo di fase da imporre è dato da $\phi = \pi - 2.852 = 0.2895$. La condizione $M \cos\phi = 72.30 > 0$ è soddisfatta. Le formule di inversione forniscono i valori $\alpha = 0.0127$ e $\tau = 521.8$, da cui risulta il controllore

$$C_1(w) = \frac{1 + 6.621s}{1 + 521.9s}\ ,$$

per trovare il controllore discreto applichiamo l'inversa della trasformazione bilineare $w \to \frac{z-1}{z+1}$.

$$C_1(z) = \frac{z + 1 + 6.621(z-1)}{z + 1 + 521.9(z-1)} = \frac{7.612z - 5.612}{522.9z - 520.9},$$

il controllore finale si trova includendo il guadagno

$$C(z) = 10\frac{7.612z - 5.612}{522.9z - 520.9} = \frac{0.1458z - 0.1075}{z - 0.9962}.$$

2- Trasformando il sistema in coordinate w, otteniamo

$$P(w) = \frac{(1 + w - 2(1-w))(1-w)^2}{(1 + w - 0.5(1-w))^3} = \frac{(3w-1)(1-w)^2}{(0.5 + 1.5w)^3} = -8\frac{(1-3w)(1-w)^2}{(1+3w)^3},$$

sostituiamo $w = j\omega_w$ abbiamo

$$P(0) = -8,\ \lim_{\omega_w \to \infty} P(j\omega_w) = \frac{8}{9}\ ,$$

inoltre

$$\arg P(j\omega_w) = -\pi - 4\arctan(3\omega_w) - 2\arctan\omega_w$$

da cui

$$\arg P(0) = -\pi, \quad \lim_{\omega_w \to \infty} \arg P(j\omega_w) = -4\pi \ ,$$

quindi il diagramma di Nyquist compie 3/4 di giri in senso orario. Calcoliamo le intersezioni con l'asse reale usando il metodo della tabella di Routh. Consideriamo il polinomio

$$\eta + P(w) \to -8(1-3w)(1-w)^2 + \eta(1+3w)^3 \to w^3(24+27\eta) + w^2(-56+27\eta) + w(40+9\eta) - 8 + \eta,$$

la tabella di Routh è data da

$$\begin{array}{ll} 24+27\eta & 40+9\eta \\ -56+27\eta & \eta-8 \\ \frac{-(\eta-8)(24+27\eta)+(40+9\eta)(-56+27\eta}{-56+27\eta}) & \end{array}$$

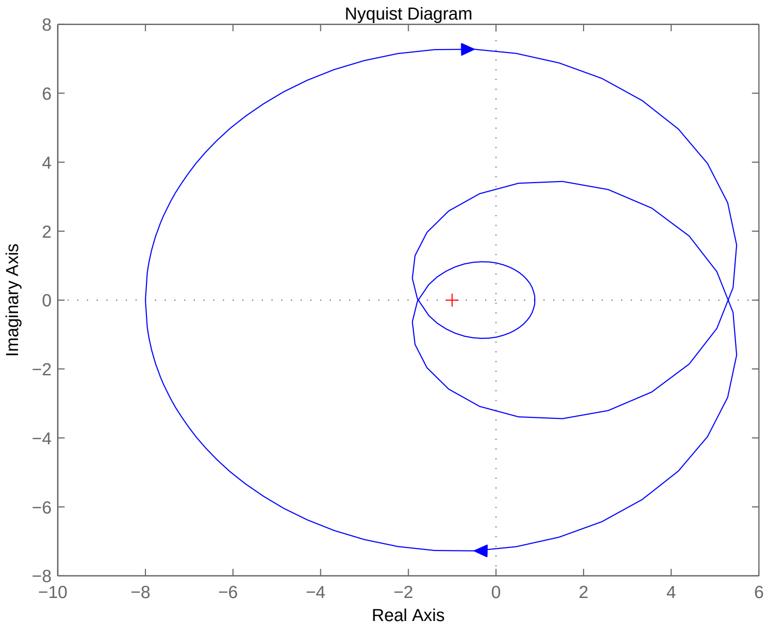
uguagliamo l'ultima casella a zero, ottenendo

$$-216\eta^2 - 768\eta + 2048 = 0$$

che ha come soluzioni

$$\eta = -\frac{16}{3} \text{ e } \eta = \frac{16}{9} \ ,$$

le intersezioni con l'asse reale sono date da queste soluzioni cambiate di segno, dunque da $\frac{16}{3}$ e $-\frac{16}{9}$. Quindi il diagramma di Nyquist è il seguente



Si ha stabilità per i valori di k per cui il punto $-\frac{1}{k}$ è esterno al diagramma di Nyquist, quindi se

$$-\frac{1}{k} < -8 \text{ oppure } -\frac{1}{k} > 16/3$$

da cui si ha che il sistema è asintoticamente stabile per

$$k \in (-\frac{3}{16}, \frac{1}{8}) \ .$$