Controlli digitali

Esercizi sulla stabilità dei sistemi discreti

1- Determina se i seguenti sistemi sono asintoticamente stabili attraverso la trasformazione bilineare

a) $P(z) = \frac{z+0.1}{z^3-0.5z^2+0.04z-0.02}$

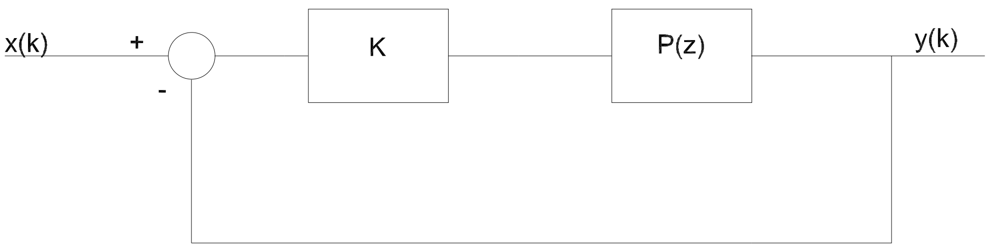
b) $P(z) = \frac{z-0.2}{z^3-z^2-1.76z-0.48}$

2- Determina se i seguenti sistemi sono asintoticamente stabili attraverso il criterio di Jury

a) $P(z) = \frac{z-0.7}{z^3-z^2+0.33z-0.0360}$

b) $P(z) = \frac{z-0.1}{z^4-z^3-1.69z^2-0.59z-0.06}$

3- Determina attraverso la tabella di Jury i valori del guadagno $K \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema retroazionato è stabile.



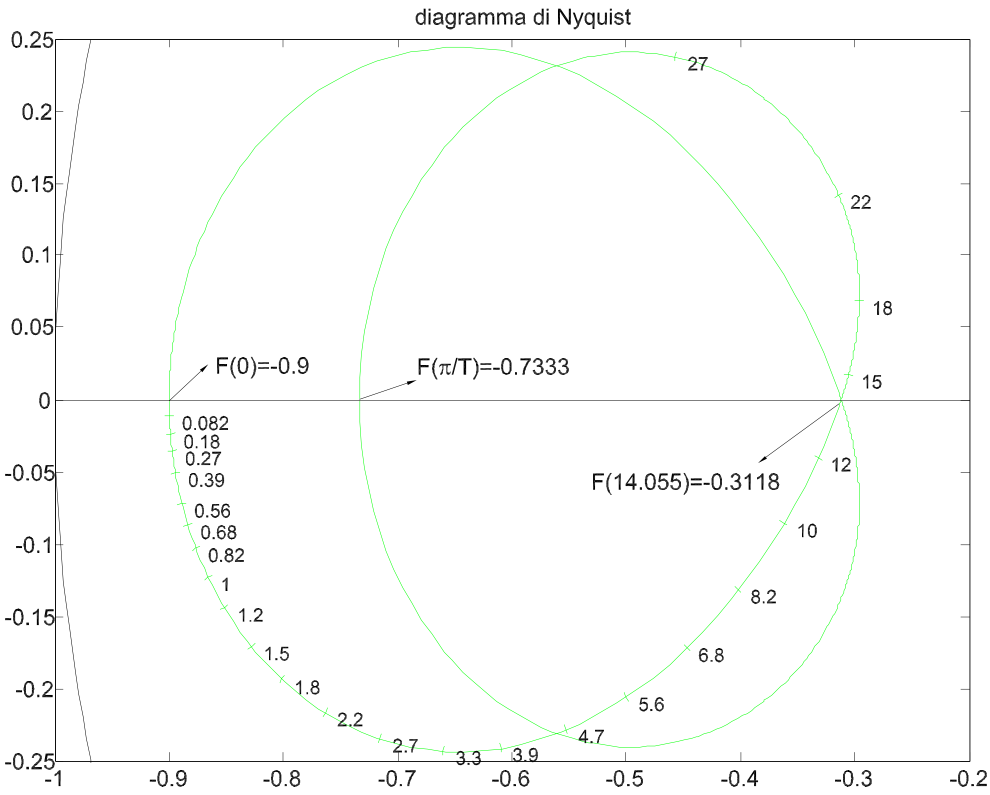
dove

$$P(z) = \frac{z}{(z-1.5)(z-0.2)(z+0.2)} .$$

4- Sempre in riferimento al sistema in retroazione rappresentato nel punto 3, determina i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per i seguenti casi in cui sono forniti la funzione di trasferimento ad anello aperto $P(z)$ e il suo diagramma di Nyquist. Il tempo di campionamento T è pari a $0.1s$. I numeri riportati lungo il diagramma rappresentano i valori della pulsazione ω corrispondenti ai punti del diagramma polare. Questi sono riportati solo per il ramo positivo. Le intersezioni con l'asse reale sono evidenziate.

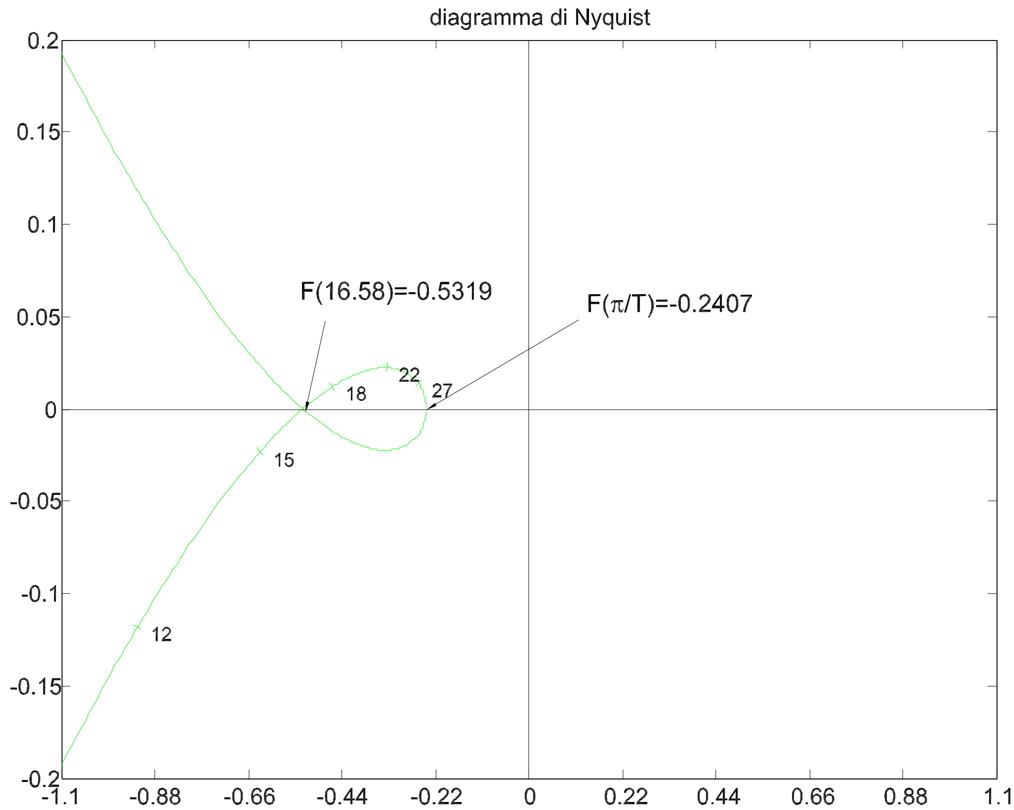
a-

$$P(z) = \frac{z-0.1}{(z-1.5)(z+1.5)(z+0.2)} ,$$



b-

$$P(z) = \frac{(z+0.2)(z-0.9)^2}{(z-0.5)(z-1)^3} \ ,$$



Risposte

1-

a) Consideriamo l'equazione caratteristica $z^3 - 0.5z^2 + 0.04z - 0.02 = 0$, sostituiamo $z = \frac{1+w}{1-w}$ e otteniamo

$$\frac{1+w}{1-w}^{3} - 0.5\frac{1+w}{1-w}^{2} + 0.04\frac{1+w}{1-w} - 0.02 = 0$$

da cui

$$\frac{1.5600w^3 + 3.4000w^2 + 2.5200w + 0.5200}{(1-w)^3} = 0 \; ,$$

ne valutiamo la stabilità con la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1.5600 & 2.5200 \\ 2 & 3.4000 & 0.5200 \\ 3 & 2.2814 & \\ 4 & 0.5200 & \end{array}$$

La tabella di Routh ha tre permanenze di segno lungo la prima colonna, quindi il sistema di partenza è stabile.

b)Sostituiamo $z = \frac{1+w}{1-w}$ nell'equazione caratteristica $z^3 - z^2 - 1.76z - 0.48 = 0$, otteniamo

$$\frac{1+w}{1-w}^3 - \frac{1+w}{1-w}^2 - 1.76\frac{1+w}{1-w} - 0.48 = 0$$

da cui

$$\frac{0.7200w^3 + 4.3200w^2 + 5.2000w - 2.2400}{(1-w)^3} = 0$$

costruiamo la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|ll} 1 & 0.7200 & 5.2000 \\ 2 & 4.3200 & -2.2400 \\ 3 & 5.5733 & \\ 4 & -2.2400 & \end{array}$$

la tabella ha due permanenze di segno e una variazione sulla prima colonna, che corrisponde a due radici a parte reale negativa e una a parte reale positiva. Il sistema è dunque instabile.

2-

a-Chiamiamo $C(z) = z^3 - z^2 + 0.33z - 0.0360$, Poniamo $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0.33$, $a_3 = -0.0360$, le condizioni necessarie del criterio di Jury sono verificate:

$$a_0 > |a_3|, \; C(1) = 0.2940 > 0, \; C(-1) = -2.3660 < 0 \; ,$$

costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	-0.0360	0.33	-1	1
2	1	-1	0.33	-0.0360
3	-0.9987	0.9881	-0.2940	

rimane da verificare la condizione sulla terza riga

$$|-0.9987| > |-0.2940|,$$

il sistema è dunque stabile.

b- Chiamiamo $C(z) = z^4 - z^3 - 1.69z^2 - 0.59z - 0.06$ e $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1.69$, $a_3 = -0.59$, $a_4 = -0.06$, le condizioni necessarie per il criterio di Jury sono

$$a_0 > |a_4|, \; C(1) = -2.3400 > 0, \; C(-1) = 0.84 > 0 \; ,$$

essendo la seconda condizione non verificata, il sistema è instabile e non è necessario costruire la tabella di Jury.

3- L'equazione caratteristica del sistema è data da

$$C(z) = z^3 - 1.5\,z^2 + (-0.04 + k)\,z + 0.06 = 0 \; ,$$

chiamiamo

$$a_0 = 1, \; a_1 = -1.5, \; a_2 = k - 0.04, \; a_3 = 0.06$$

applichiamo il criterio di Jury. Dalle condizioni necessarie

$$1 > |0.06|. \; C(1) = k - 0.48 > 0, \; C(-1) = -2.4 - k < 0 \; ,$$

la prima condizione è sempre verificata, la seconda richiede $k > 0.48$ e la terza $k > -2.40$. Costruiamo ora la tabella di Jury:

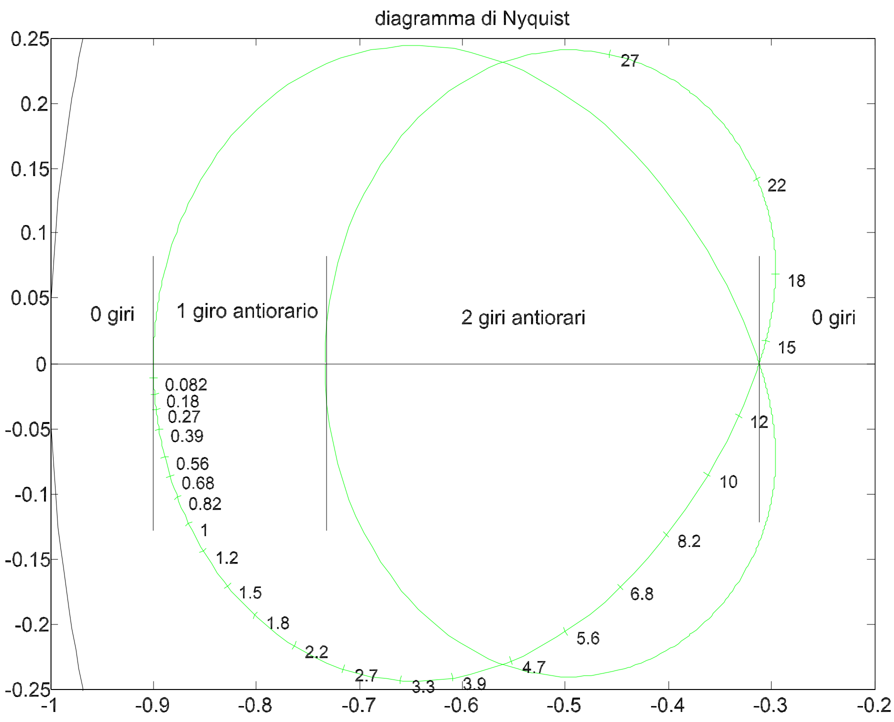
	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.06	$k-0.04$	-1.5	1
2	1	-1.5	$k-0.04$	0.06
3	-0.9964	$1.4976+0.06k$	$-k-0.05$	

da cui deriva la condizione $|-0.9964| > |-k-0.05|$, verificata se $-1.0464 < k < 0.9464$. Intersecando le condizioni trovate, otteniamo che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$0.48 < k < 0.9464\,.$$

4-

a- Consideriamo un punto critico sia in $-\frac{1}{k}$. Per avere stabilità asintotica il punto critico deve essere circondato per due volte in senso antiorario, visto che la funzione di trasferimento ad anello aperto presenta due poli a modulo maggiore di 1.



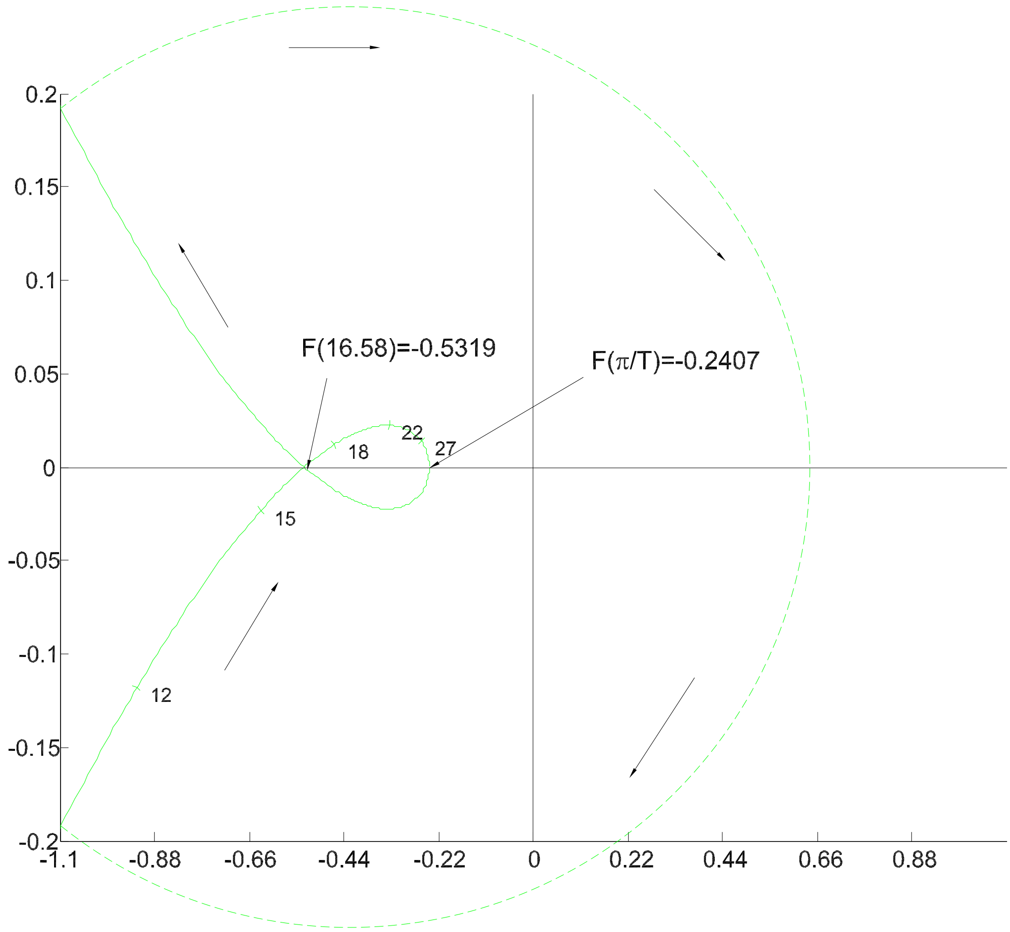
Dalla figura si vede che questo succede se

$$-0.7333 < -\frac{1}{k} < -0.3118,$$

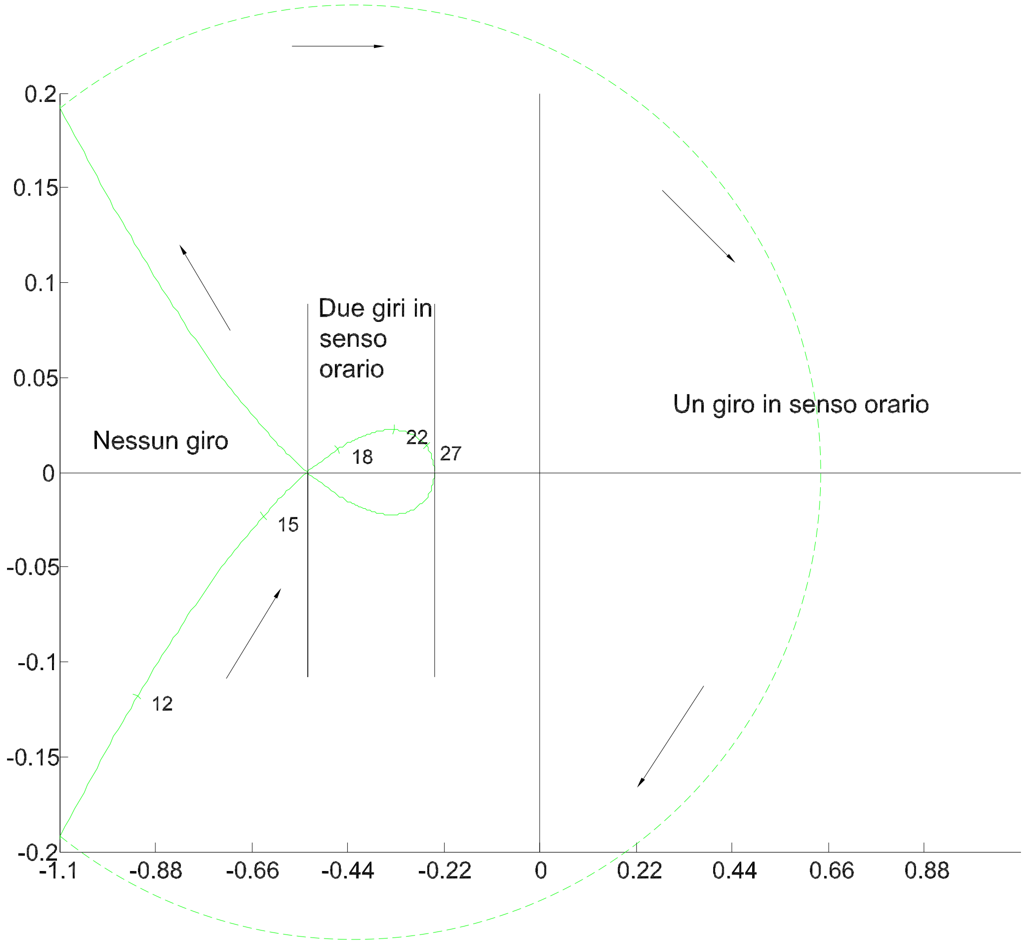
da cui

$$1.3636 < k < 3.2075\,.$$

b- Prima di tutto costruiamo il diagramma polare completo. Visto che la funzione $P(z)$ ha tre poli e quattro zeri dentro il contorno di Nyquist, il diagramma polare completo fa un giro in senso antiorario attorno all'origine. Quindi il diagramma completo si ottiene completando quello fornito nel modo seguente.



Consideriamo un punto critico in $-\frac{1}{k}$. Per avere stabilità asintotica il punto critico non deve essere circondato alcuna volta, visto che la funzione di trasferimento ad anello aperto non presenta poli a modulo maggiore di 1.



Dalla figura si vede che questo succede se $-\frac{1}{k} < -0.5319$, da cui

$$k < 1.8801 \ .$$