UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

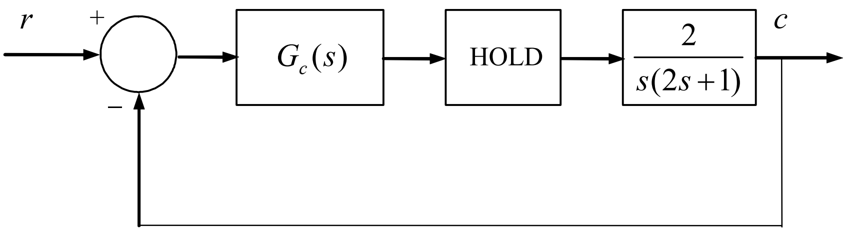
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

5/7/04

PARTE A - I

a) Si consideri lo schema in retroazione unitaria riportato in figura



dove il controllore $G_c(s)$ è costituito da una rete ritardatrice: $G_c(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$. Si voglia progettare un regolatore digitale mediante l'uso delle tecniche di discretizzazione dei regolatori continui. A tal fine si ricavino i coefficienti del regolatore continuo $G_c(s)$ capace di garantire:

1) una costante di velocità della funzione di anello pari a $K_v = 4$;
2) un margine di ampiezza del sistema retroazionato pari a $M_A = 2$

Nello svolgere il progetto si tenga conto della presenza del dispositivo di hold e si ipotizzi un tempo di campionamento $T = 2$ s.
(suggerimento: si usino le formule di inversione).

b) Si verifichi se il tempo di campionamento adottato risulta compatibile con il controllore sintetizzato, spiegando il perché.

c) Si discretizzi il controllore trovato mediante il metodo della corrispondenza poli-zeri e se ne discuta la stabilità.

Soluzione Parte I

a) Ricordando che la funzione di trasferimento approssimata di un circuito di Hold risulta essere $H(s) = \frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$ e che il tempo di campinamento deve essere pari a 2 secondi si ricava che $H(s) = \frac{1}{s+1}$, la funzione di trasferimento di anello sarà: $G(s) = \frac{1}{s(s+0.5)(s+1)}$.

La costante di velocità della funzione di anello risulta essere:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{(s+0.5)(s+1)} = 2\,.$$

Per ottenere come desiderato $K_v = 4$ si deve imporre un guadagno della rete compensatrice pari a $K = 2$. Prima di passare al progetto degli altri termini della rete aggiungiamo tale guadagno all'espressione dell'impianto in quanto la rete correttrice dovrà compensare anche gli effetti dovuti alla sua presenza. La $G(s)$ da considerare in fase di progetto sarà allora

$$G(s) = \frac{2}{s(s+0.5)(s+1)}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica $G(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega + 0.5)(j\omega + 1)}$ può essere scomposta al fine di valutarne il modulo e l'argomento:

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\omega\,\sqrt{\omega^2 + 0.25}\,\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \arctan(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(2\omega) - \arctan(\omega)\,.$$

Al fine di fissare una pulsazione ω_0 adeguata per il calcolo della rete anticipatrice conviene tracciare (almeno in forma qualitativa) il diagramma di Nyquist del sistema. Il tracciamento risulta piuttosto semplificato visto che il sistema è a fase minima con un solo polo nell'origine: sarà presente un asintoto verticale e l'arrivo nell'origine sarà caratterizzato da una fase pari a $-\frac{3}{2}\pi$.

Valutiamo la pulsazione per la quale si ha intersezione con l'asse reale

$$\angle G(j\tilde{\omega}) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(2\tilde{\omega}) - \arctan(\tilde{\omega}) = -\pi \quad \Rightarrow \quad \arctan(2\tilde{\omega}) + \arctan(\tilde{\omega}) = \frac{\pi}{2}$$

Una equazione di questo tipo può essere risolta ricorrendo alla solita relazione $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$ ovvero

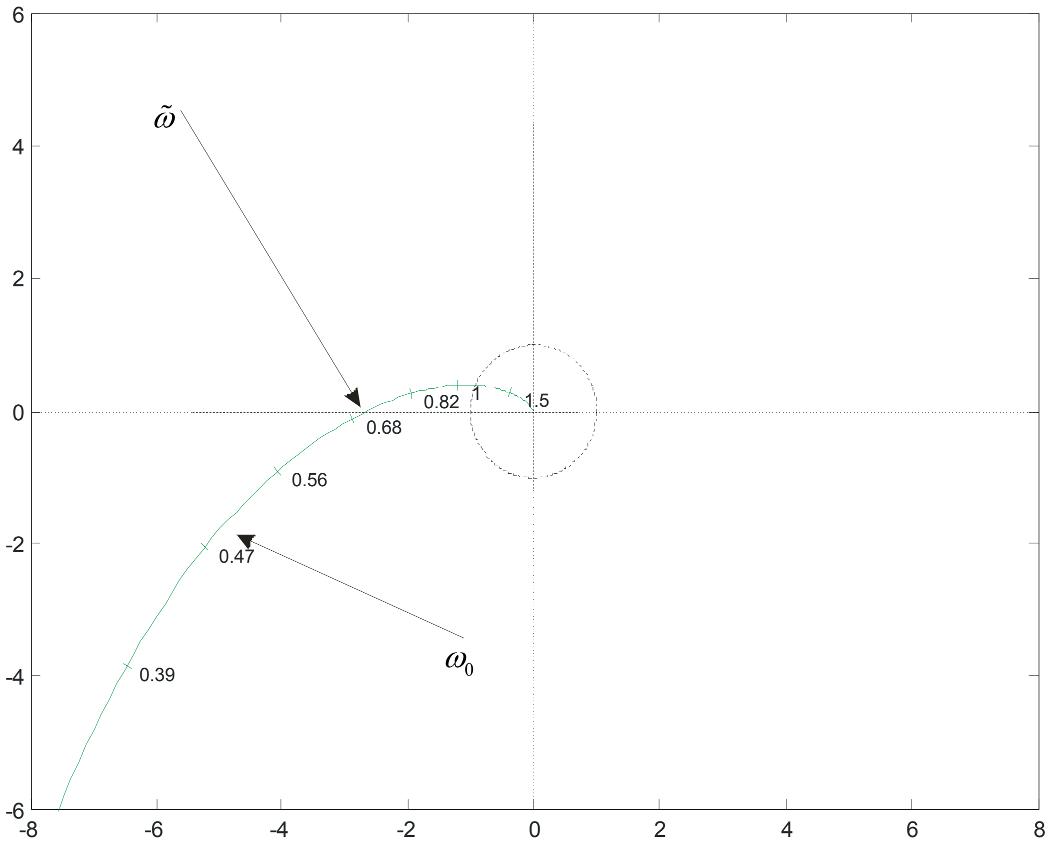
$$\tan\left[\arctan\left(2\tilde{\omega}\right)+\arctan\left(\tilde{\omega}\right)\right]=\tan\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\tilde{\omega}+\tilde{\omega}}{1-2\tilde{\omega}\tilde{\omega}}=\tan\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-2\tilde{\omega}^2}{3\tilde{\omega}}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}}=0 \quad\Rightarrow\quad 1-2\tilde{\omega}^2=0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{\omega}=\sqrt{0.5}=0,7071$$

Si calcoli il $\left|G(j\tilde{\omega})\right|$

$$\left|G(j\tilde{\omega})\right|=\frac{2}{\tilde{\omega}\,\sqrt{\tilde{\omega}^2+0.25}\,\sqrt{\tilde{\omega}^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{0.5}\,\sqrt{0.5+0.25}\,\sqrt{0.5+1}}=2.6667$$

E' allora chiaro che il diagramma di Nyquist ha un andamento del tipo



Il margine di ampiezza di partenza è pari a $M_A=0,3749$ e quindi il sistema retroazionato sarebbe instabile se non si introducesse la rete compensatrice. Si scelga un valore ω_0 leggermente inferiore a $\tilde{\omega}$ in modo da avere buone possibilità di soddisfare la condizione di esistenza della soluzione del problema: $\omega_0=0.5$.

Si calcoli il ritardo che deve essere fornito dalla rete ritardatrice per garantire il margine di ampiezza richiesto

$$\varphi_0=\pi+\angle G(j\omega_0)=\pi-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(2\omega_0\right)-\arctan\left(\omega_0\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(1\right)-\arctan\left(0.5\right)=0.3218\,.$$

Poiché si sta progettando una rete posticipatrice la condizione da verificare per garantire l'esistenza della soluzione sarà, al solito, $\cos\varphi_0>\dfrac{1}{M_A\left|G(j\omega_0)\right|}$ e pertanto

$$\cos\varphi_0 > \frac{1}{M_A\left|G(j\omega_0)\right|} = \frac{1}{2\left|G(j0.5)\right|}$$
$$\Downarrow$$
$$0.9487 > \frac{0.5\ \sqrt{0.25+0.25}\ \sqrt{0.25+1}}{4} = 0.0988 .$$

Come era da attendersi vista la scelta fatta di ω_0, la condizione di esistenza è ovviamente verificata.

La rete ritardatrice può essere pertanto progettata usando le solite espressioni.

$$M = M_A\left|G(j\omega_0)\right| = 10.1193$$
$$\varphi = \varphi_0 = 0.3218$$

Ricordando che per α e τ valgono le solite relazioni, si ricava

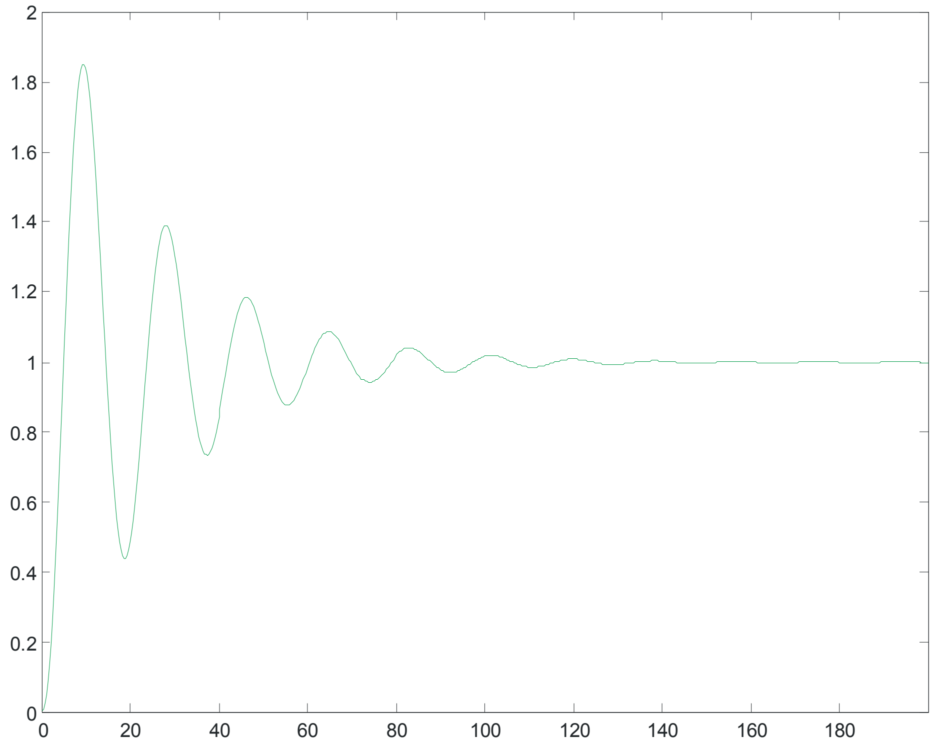
$$\alpha = \frac{M\cos\varphi - 1}{M(M-\cos\varphi)} = \frac{10.1193\cdot 0.9487-1}{10.1193(10.1193-0.9487)} = 0.0927$$

$$\tau = \frac{M-\cos\varphi}{\omega_0\sin\varphi} = \frac{10.1193-0.9487}{0.5\cdot 0.3163} = 57.9867$$

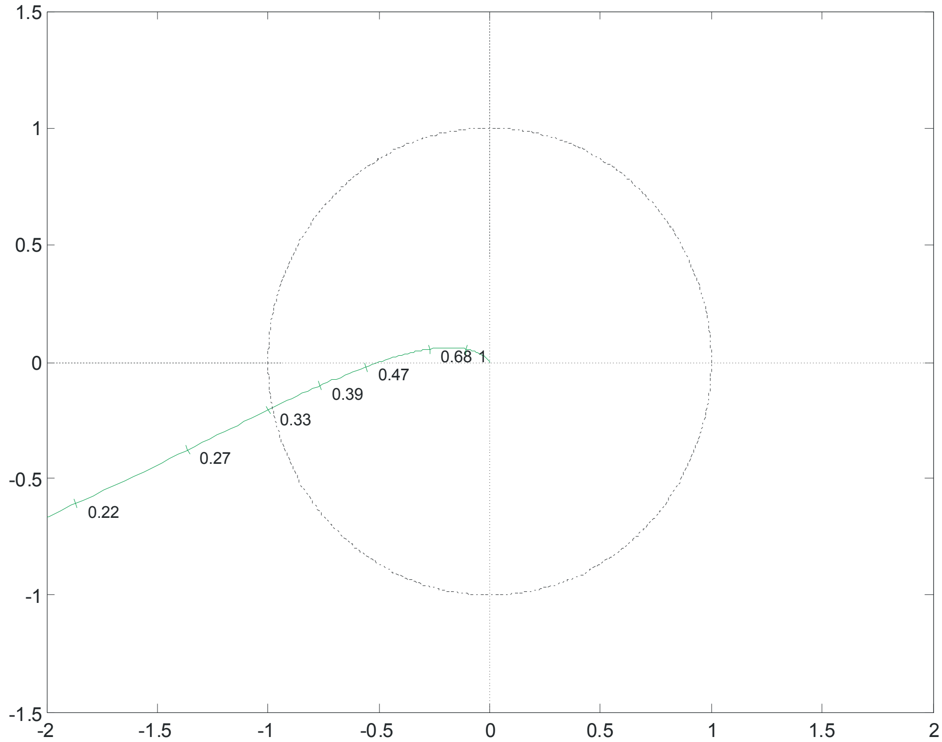
In conclusione la rete anticipatrice che soddisfa la specifica sul margine di fase è data da

$$G_c(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} = 2\frac{1+0.0927\cdot 57.9867s}{1+57.9867s} = 0.1854\frac{s+0.186}{s+0.01725} .$$

La risposta al gradino unitario del sistema retroazionato sarà



La risposta al gradino risulta essere molto oscillatoria perché il sistema presenta uno scarso margine di fase: $M_F = 11.61°$. Questo è un tipico esempio in cui il soddisfacimento della specifica sul margine di ampiezza non è sufficiente per garantire un comportamento sufficientemente buono del sistema retroazionato. Il grafico riportato nel seguito mostra il diagramma di Nyquist complessivo ottenuto dopo aver introdotto la rete correttrice.



b) Affinchè la discretizzazione del controllore porti a dei risultati che siano consistenti, ovvero affinché il regolatore discreto possa emulare al meglio il comportamento del regolatore continuo, è necessario che tutte le pulsazioni caratteristiche della rete correttrice siano ben al di sotto della pulsazione di Nyquist $\frac{\pi}{T}$ (ovvero siano almeno $2 \div 10$ volte più piccole). Nel caso in questione la pulsazione massima della rete è quella relativa allo zero (0.186) mentre la pulsazione di Nyquist è pari a 1.5708.

Si può concludere che la scelta del tempo di campionamento risulta appropriata per le esigenze di progetto.

c) Si ricordi che la corrispondenza poli-zeri richiede di ottenere il regolatore discreto attraverso la sostituzione $(s+a) \quad \Rightarrow \quad (z-e^{-aT})$ e di aggiungere tanti zeri in -1 quanto è l'eccesso tra poli e zeri nella funzione di trasferimento da trasformare. Ricordando che T=2, si ricava

$$G_c(s) = K\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} = 2\frac{1+0.0927\cdot 57.9867s}{1+57.9867s} = 0.1854\frac{\mathrm{s}+0.186}{\mathrm{s}+0.01725}$$

$$G_c(z) = \tilde{k}\frac{(z-e^{-0.3720})}{(z-e^{-0.0345})} = \tilde{k}\frac{(z-0.6894)}{(z-0.9661)}.$$

Poiché il sistema è di tipo 0 il valore di $\tilde{k}$ si valuta imponendo che il controllore discreto e quello continuo abbiano lo stesso guadagno statico

$$\lim_{s\to 0} G_c(s) = \lim_{z\to 1} G_c(z)$$

Pertanto

$$\lim_{s\to 0} G_c(s) = \lim_{s\to 0} 0.1854\frac{\mathrm{s}+0.186}{\mathrm{s}+0.01725} = 2$$

ed essendo

$$\lim_{z\to 1} G_c(z) = \lim_{z\to 1} \tilde{k}\,\frac{(z-0.6894)}{(z-0.9661)} = \tilde{k}\ 9.1622$$

dal confronto delle due relazioni si ricava $\tilde{k} = 0.2183$.
Il regolatore discreto avrà equazione

$$G_c(z) = 0.2183\,\frac{(z-0.6894)}{(z-0.9661)}$$

e sarà pertanto stabile.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

5/7/04

PARTE A - II

a) Sia assegnato un segnale continuo la cui trasformata di Laplace sia espressa dalla seguente funzione

$$X(s) = e^{-4s}\,\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+4)}$$

Si chiede di valutarne la $\mathcal{Z}$-trasformata ipotizzando un tempo di campionamento $T = 0.5$ s .

(Suggerimento: $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\} = \dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$; $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2}\right\} = \dfrac{Tz^{-1}e^{-aT}}{\left(1-e^{-aT}z^{-1}\right)^2}$)

b) Sia assegnato un segnale discreto la cui $\mathcal{Z}$-trasformata sia espressa dalla funzione

$$X(z) = \frac{(z+0.3)}{(z-0.4)(z-0.8)}$$

Si chiede di valutarne l'antitrasformata usando la tecnica dell'integrale di inversione, prestando attenzione al caso particolare che si ha per $k = 0$.

Soluzione Parte II

Quesito a

Osservando l'espressione del segnale $X(s)$ si nota che si tratta di una funzione con un ritardo finito di 4 secondi (ovvero otto passi di campionamento). La sua trasformata sarà allora data da

$$\mathcal{Z}\left\{X(s)\right\} = \mathcal{Z}\left\{e^{-4s}\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+4)}\right\} = z^{-8}\mathcal{Z}\left\{\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+4)}\right\}$$

Si ricorra alla scomposizione in fratti semplici ricordando che se si desidera applicare il teorema dei residui sia il numeratore che il denominatore devono essere monici e quindi

$$\mathcal{Z}\left\{X(s)\right\} = 2z^{-8}\mathcal{Z}\left\{\frac{s+1/2}{(s+2)^2(s+4)}\right\} = 2z^{-8}\mathcal{Z}\left\{X_1(s)\right\}$$

Si scomponga $X_1(s)$

$$X_1(s) = \frac{a}{(s+2)^2} + \frac{b}{s+2} + \frac{c}{s+4}$$

con

$$a = \lim_{s\to-2}(s+2)^2 X_1(s) = \lim_{s\to-2}(s+2)^2\frac{s+1/2}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{-2+1/2}{(-2+4)} = -\frac{3}{4}$$

$$c = \lim_{s\to-4}(s+4)X_1(s) = \lim_{s\to-4}(s+4)\frac{s+1/2}{(s+2)^2(s+4)} = \frac{-4+1/2}{(-4+2)^2} = -\frac{7}{8}$$

Poiché il grado relativo di $X_1(s)$ è maggiore di uno, allora la somma dei residui deve essere nulla

$$b+c=0 \quad\Rightarrow\quad b=-c \quad\Rightarrow\quad b=\frac{7}{8}$$

Si calcoli $X(z)$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{X(s)\right\} &= 2z^{-8}\mathcal{Z}\left\{X_1(s)\right\} = 2z^{-8}\mathcal{Z}\left\{-\frac{3}{4}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{7}{8}\frac{1}{s+2} - \frac{7}{8}\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= 2z^{-8}\left\{-\frac{3}{4}\frac{Tz^{-1}e^{-2T}}{\left(1-e^{-2T}z^{-1}\right)^2} + \frac{7}{8}\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} - \frac{7}{8}\frac{1}{1-e^{-4T}z^{-1}}\right\}\end{aligned}$$

Ricordando che $T = 0.5\,\text{s}$ si ricava

$$\begin{aligned}X_1(z) &= 2z^{-8}\left\{-\frac{3}{8}\frac{z^{-1}e^{-1}}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2} + \frac{7}{8}\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{7}{8}\frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{4}z^{-8}\left\{-\frac{3z^{-1}e^{-1}}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2} + \frac{7}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{7}{1-e^{-2}z^{-1}}\right\} \\ &= \frac{1}{4}z^{-8}\left\{\frac{-3z^{-1}e^{-1}\left(1-e^{-2}z^{-1}\right) + 7\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)\left(1-e^{-1}z^{-1}\right) - 7\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)}\right\} \\ &= \frac{1}{4}z^{-8}\left\{\frac{-3z^{-1}e^{-1} + 3e^{-3}z^{-2} + 7\left(1-(e^{-2}+e^{-1})z^{-1} + e^{-3}z^{-2}\right) - 7\left(1-2e^{-1}z^{-1} + e^{-2}z^{-2}\right)}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)}\right\}\end{aligned}$$

$$X_1(z) = \frac{1}{4}z^{-8}\left\{\frac{-3z^{-1}e^{-1}+3e^{-3}z^{-2}+7-7(e^{-2}+e^{-1})z^{-1}+7e^{-3}z^{-2}-7+14e^{-1}z^{-1}-7e^{-2}z^{-2}}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}z^{-8}\left\{\frac{\left(10e^{-3}-7e^{-2}\right)z^{-2}+\left(4e^{-1}-7e^{-2}\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-1}z^{-1}\right)^2\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)}\right\} = \frac{-0.1124z^{-10}+0.1310z^{-9}}{\left(1-0.3679z^{-1}\right)^2\left(1-0.1353z^{-1}\right)}$$

Quesito b

La tecnica dell'integrale di inversione richiede che si valutino i residui della funzione

$$X(z)\ \ z^{k-1} = \frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.4)(z-0.8)}.$$

per $k = 0$ presenta un polo semplice nell'origine

$$k=1 \Rightarrow X(z)\ \ z^{k-1} = \frac{(z+0.3)}{z(z-0.4)(z-0.8)}$$

mentre per $k > 0$ non presenta alcun polo nell'origine

$$k>1 \Rightarrow X(z)\ \ z^{k-1} = \frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.4)(z-0.8)}.$$

Poiché le due espressioni contengono un numero diverso di poli, si dovranno svolgere due diversi calcoli dei residui.

1) $k = 0$;

Si calcolino i residui in $z = 0$, in $z = 0.8$ e in $z = 0.4$

$$\text{Res }(0) = \left[z\frac{(z+0.3)}{z(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0} = \left[\frac{(z+0.3)}{(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0} = \left[\frac{0.3}{0.32}\right] = 0.9375$$

$$\text{Res }(0.4) = \left[(z-0.4)\frac{(z+0.3)}{z(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.4} = \left[\frac{(z+0.3)}{z(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.4} = -\frac{0.7}{0.16} = -4.3750$$

$$\text{Res }(0.8) = \left[(z-0.8)\frac{(z+0.3)}{z(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.8} = \left[\frac{(z+0.3)}{z(z-0.4)}\right]\Bigg|_{z=0.8} = \frac{1.1}{0.32} = 3.4375.$$

Ricordando che $x(k) = \sum_i \text{Res}\,(z_i)$ si potrà scrivere

$x(0) = \text{Res}(0) + \text{Res}(0.4) + \text{Res}(0.8) = 0$.

Si poteva giungere allo stesso risultato senza svolgere alcun conto notando che la funzione che si sta antitrasformando ha grado relativo pari ad uno e quindi è una funzione ritardata di un campione.

3) $k \geq 1$;

In quest'ultimo caso la funzione $X(z)\,z^{k-1}$ non possiede poli nell'origine per cui

$$\text{Res }(0.4) = \left[(z-0.4)\frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.4} = \left[\frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.4} = -1.75\cdot 0.4^{k-1}$$

$$\text{Res }(0.8) = \left[(z-0.8)\frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.4)(z-0.8)}\right]\Bigg|_{z=0.8} = \left[\frac{(z+0.3)z^{k-1}}{(z-0.4)}\right]\Bigg|_{z=0.8} = 2.75\cdot 0.8^{k-1}.$$

L'espressione finale dell'antitrasformata ottenuta tenendo conto dei due risultati sarà quindi

$x(k) = h(k-1)\left[2.75\cdot 0.8^{k-1} - 1.75\cdot 0.4^{k-1}\right]$

dove con $h(k-1)$ è stata indicata la sequenza di impulsi unitaria ritardata di due campioni.