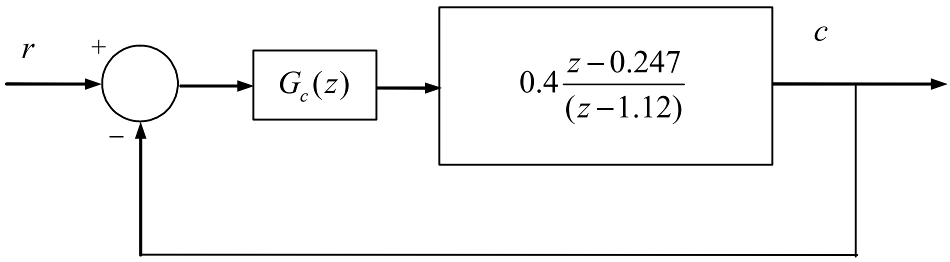
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

13/9/04

PARTE A-1

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di progettare il controllore $G_c(z)$ in modo tale che la risposta <u>alla rampa</u> del sistema retroazionato sia di tipo deadbeat.

b) Si discretizzi il controllore continuo

$$G_c(s) = 2\frac{s+4}{s(s+2)}$$

mediante la tecnica basata sulla corrispondenza poli-zeri, adottando un tempo di campionamento $T = 0.5s$. Verificare se il tempo di campionamento scelto è compatibile con la rete $G_c(s)$.

Soluzione Parte A-I

Quesito a:

Impostiamo i polinomi:

$B^- = 0.4(z-0.247) = K(z-a)$

$B^+ = 1$

$A^- = (z-1.12) = (z-b)$

$A^+ = 1$

Visto che l'errore alla rampa deve essere nullo e che nell'impianto non è presente alcun integratore, per ottenere un comportamento di tipo deadbeat poniamo $q = 2$.

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea
grado(S')=1+2-1=2
grado(R'')=1-0-1=0
grado(A_m)=1+1-0-1+2=3
E' previsto quindi un aggancio del riferimento al gradino in tre soli passi di campionamento.

Impostiamo l'equazione Diofantea:

$$(z-b)\,r_0(z-1)^2 + k(z-a)(s_0+s_1z+s_2z^2) = z^3$$

$$(z-b)\,r_0(z^2-2z+1) + k(s_0z+s_1z^2+s_2z^3-as_0-as_1z-as_2z^2) = z^3$$

$$r_0(z^3-2z^2+z-bz^2+2bz-b) + k(s_0z+s_1z^2+s_2z^3-as_0-as_1z-as_2z^2) = z^3$$

$$(r_0+ks_2)z^3 + (ks_1-kas_2-2r_0-br_0)z^2 + (ks_0-kas_1+r_0+2br_0)z - br_0 - kas_0 = z^3$$

che può essere risolto attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} r_0+ks_2 = 1 \\ -kas_2+ks_1-(2+b)r_0 = 0 \\ ks_0-kas_1+(1+2b)r_0 = 0 \\ -br_0-kas_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1-ks_2 \\ -kas_2+ks_1-(2+b)(1-ks_2) = 0 \\ ks_0-kas_1+(1+2b)(1-ks_2) = 0 \\ -b(1-ks_2)-kas_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_0 = 1-ks_2 \\ -kas_2+ks_1-(2+b)(1-ks_2) = 0 \\ aks_0-ka^2s_1+a(1+2b)(1-ks_2) = 0 \\ kas_0 = -b(1-ks_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1-ks_2 \\ -ka^3s_2+ka^2s_1-a^2(2+b)(1-ks_2) = 0 \\ -b(1-ks_2)-ka^2s_1+a(1+2b)(1-ks_2) = 0 \\ kas_0 = -b(1-ks_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_0 = 1-ks_2 \\ ka^2s_1 = a^2(2+b)(1-ks_2)+ka^3s_2 \\ -b(1-ks_2)-a^2(2+b)(1-ks_2)-ka^3s_2+a(1+2b)(1-ks_2) = 0 \\ kas_0 = -b(1-ks_2) \end{cases}$$

Riordinando la terza equazione si ottiene

$$[bk+a^2(2+b)k-ka^3-a(1+2b)k]s_2 - a^2(2+b)+a(1+2b)-b = 0$$

che può essere risolta in funzione di s_2 sostituendo alle costanti i relativi valori numerici

$$s_2 = \frac{a^2(2+b)-a(1+2b)+b}{bk+a^2(2+b)k-ka^3-a(1+2b)k} = 2.5761.$$

Dall'ultima realzione si ricava

$s_0 = -\dfrac{b(1-ks_2)}{ka} = 0.3451$,

mentre dalla seconda

$s_1 = \dfrac{a^2(2+b)(1-ks_2)+ka^3 s_2}{ka^2} = 0.3988$.

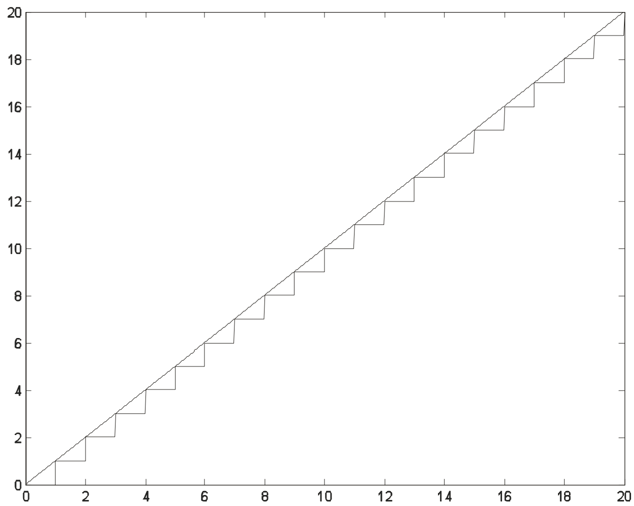
Per finire, dalla prima equazione si ottiene

$r_0 = 1 - ks_2 = -0.03044$

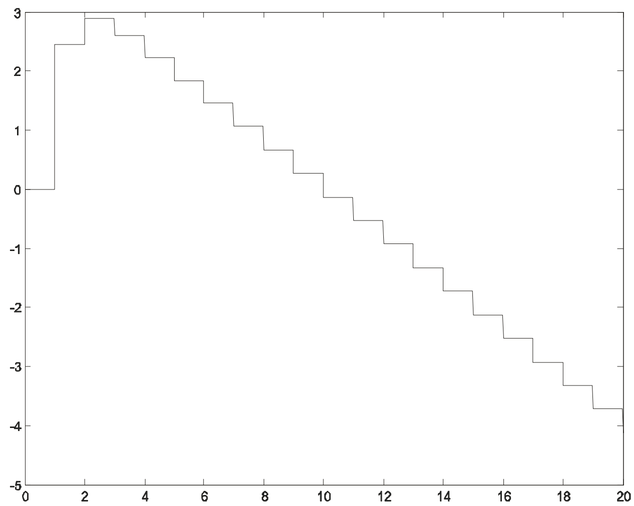
L'equazione del regolatore deadbeat sarà dunque

$G_c(z) = \dfrac{(2.5761z^2 + 0.3988z + 0.3451)}{-0.03044(z-1)^2} = -84.62\dfrac{(z\ +\ 0.07741)^2\ +\ 0.3577^2}{(z-1)^2}$.

Per concludere, si riportano nel seguito l'andamento del segnale di uscita dell'impianto e il segnale di comando dello stesso. Come desiderato la rampa di ingresso viene agganciata esattamente dopo tre passi di campionamento (anche se dalla figura sembrerebbe che l'aggancio sia immediato, nella realtà, per i primi tre passi di campionamento, sono presenti dei piccoli errori) e, sempre dopo tre passi di campionamento, il transitorio del segnale di comando si esaurisce. Si noti che. per poter inseguire la rampa, il controllore è costretto a fornire un segnale di uscita che si decrementa continuamente. In una situazione di questo genere, dopo breve tempo, la variabile di controllo saturerebbe: il controllore pur essendo corretto dal punto di vista teorico non risulta tuttavia utilizzabile praticamente.



Uscita del sistema retroazionato



Segnale di comando dell'impianto

Quesito b.

Si ricordi che la corrispondenza poli-zeri richiede di ottenere il regolatore discreto attraverso la sostituzione $(s+a) \quad \Rightarrow \quad (z - e^{-aT})$ e di aggiungere tanti zeri in -1 quanto è l'eccesso tra poli e zeri nella funzione di trasferimento da trasformare. Ricordando che T=0.5, si ricava

$G_c(z) = \tilde{k}\dfrac{(z-e^{-2})(z+1)}{(z-e^{-1})(z-1)} = \tilde{k}\dfrac{(z-0.1353)(z+1)}{(z-0.3679)(z-1)}$.

Poiché il sistema è di tipo 1 il valore di $\tilde{k}$ si valuta imponendo che il controllore discreto e quello continuo abbiano la stessa costante di velocità

$$\lim_{s\to 0} sG_c(s) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{T}G_c(z)$$

Pertanto

$\lim_{s\to 0} sG_c(s) = \lim_{s\to 0} 2s\dfrac{s+4}{s(s+2)} = \lim_{s\to 0} 2\dfrac{s+4}{s+2} = 4$

ed essendo

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{T}G_c(z)=\lim_{z\to 1}\tilde{k}\,\frac{(z-1)}{0.5}\,\frac{(z-0.1353)(z+1)}{(z-0.3679)(z-1)}=\lim_{z\to 1}\tilde{k}\,\frac{2(z-0.1353)(z+1)}{(z-0.3679)}=\tilde{k}\;\frac{4(1-0.1353)}{(1-0.3679)}=\tilde{k}\,5.4720$$

dal confronto delle due relazioni si ricava $\tilde{k}=0.7310$.
Il regolatore discreto avrà equazione

$G_c(z)=0.7310\dfrac{(z-0.1353)(z+1)}{(z-0.3679)(z-1)}$ e sarà pertanto stabile.

La pulsazione di Nyquist del sistema è pari a $\dfrac{\pi}{T}=2\pi=6.2829$. Lo zero in -4 corrisponde ad una pulsazione troppo vicina a quella di Nyquist per cui ci si trova al limite di utilizzabilità della rete proposta.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

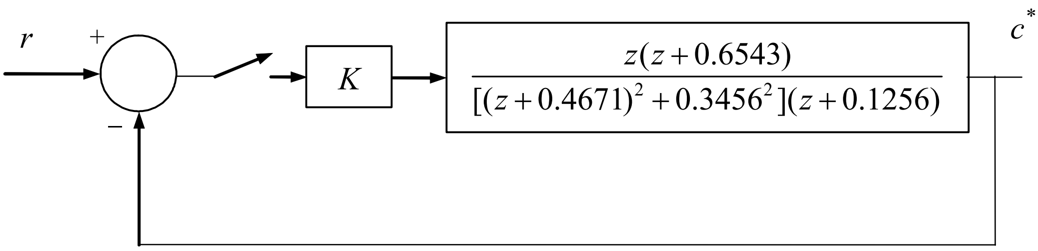
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

13/9/04

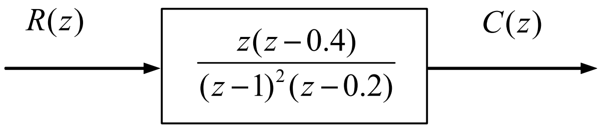
PARTE A - II

a) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione unitaria:



Si chiede di valutare la stabilità asintotica al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$ mediante il criterio di Jury.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione libera dell'uscita $c(k)$ del sistema sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono: $c(0)=2$; $c(1)=2$; $c(2)=1$. Si faccia ricorso all'integrale di inversione.

Soluzione Parte A-II

Quesito a.

Si valuti in polinomio caratteristico del sistema.

$$1+K\frac{z(z+0.6543)}{[(z+0.4671)^2+0.3456^2]*(z+0.1256)}=0$$

$$[(z+0.4671)^2+0.3456^2]*(z+0.1256)+Kz(z+0.6543)=0$$

$$z^3+(1.0598+K)z^2+(0.4550+0.6543K)z+0.04241=0$$

Il polinomio caratteristico del sistema risulta essere quindi del terzo ordine. Per valutare la stabilità asintotica del sistema retroazionato risulta pertanto necessario impostare la tabella di Jury. Si cominci con il prendere in considerazione le disuguaglianze

1) $a_0>0 \quad \Rightarrow \quad 1>0 \quad \surd$

2) $a_0>|a_n|\Rightarrow 1>0.04241 \ \surd$

3) $$\begin{aligned}&P(z)|_{z=1}>0\Rightarrow 1+1.0598+K+0.4550+0.6543K+0.04241>0\\&\Rightarrow 2.5572+1.6543K>0\Rightarrow K>-1.5458\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}&P(z)|_{z=-1}<0 \quad \text{(il polinomio è dispari)}\Rightarrow\\&\Rightarrow -1+1.0598+K-0.4550-0.6543K+0.04241<0\\&\Rightarrow -0.3528+0.3457K<0\Rightarrow K<1.0205\end{aligned}$$

Le quattro condizioni sono simultaneamente soddisfatte se

$$-1.5458<K<1.0205\,.$$

Resta da costruire la tabella di Jury

1	0.04241	$0.4550+0.6543K$	$1.0598+K$	1
2	1	$1.0598+K$	$0.4550+0.6543K$	0.04241
3	-0.9982	--	-0.4101-0.61189K	
4	-0.4101-0.61189K	--	-0.9982	

da cui si ricava

5)

$$|b_2|>|b_0| \quad\Rightarrow\quad |-0.9982|>|-0.4101-0.61189K| \quad\Rightarrow\quad 0.9982>|-0.4101-0.61189K|$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-0.4101-0.61189K<0.9982\\-0.9982<-0.4101-0.61189K\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0.61189K>-0.4101-0.9982\\0.61189K<-0.4101+0.9982\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}K>-2.3016\\K<0.9611\end{cases}$$

Si noti che i valori della seconda colonna non sono stati valutati in quanto non necessari.

Le cinque condizioni sono simultaneamente soddisfatte se

$$-1.5458<K<0.9611\,.$$

Quesito b:

Si riscrive la funzione di trasferimento in forma simbolica

$$C(z)=\frac{z(z-0.4)}{(z-1)^2(z-0.2)}R(z)=\frac{z(z-a)}{(z-1)^2(z-b)}R(z)$$

Si risale all'equazione alle differenze del sistema

$$C(z)\left[(z^2-2z+1)(z-b)\right]=R(z)\left[z(z-a)\right]$$

$$C(z)\left[z^3-(b+2)z^2+(1+2b)z-b\right]=R(z)(z^2-az)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k+3)-(b+2)\,c(k+2)+(1+2b)\,c(k+1)-bc(k)=r(k+2)-a\,r(k+1)$$

Si ritrasforma tenendo conto delle condizioni iniziali. Poiché interessa la sola evoluzione libera del sistema si eguaglia a zero il lato destro della equazione

$$\mathcal{Z}\left\{c(k+3)-(b+2)\,c(k+2)+(1+2b)\,c(k+1)-bc(k)\right\}=0$$

$$z^3C(z)-z^3c(0)-z^2c(1)-zc(2)-(b+2)\left[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)\right]+(1+2b)\left[z\,C(z)-zc(0)\right]-b\,C(z)=0$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali imposte si ottiene l'equazione semplificata

$$z^3C(z)-2z^3-2z^2-z-(b+2)\left[z^2C(z)-2z^2-2z\right]+(1+2b)\left[z\,C(z)-2z\right]-b\,C(z)=0$$

$$\left[z^3-(b+2)z^2+(1+2b)z-b\right]C(z)=2z^3+2z^2+z+(b+2)\left[-2z^2-2z\right]+2z(1+2b)$$

$$\left[(z-1)^2(z-b)\right]C(z)=2z^3+\left[2-2(b+2)\right]z^2+\left[1-2(b+2)+2(1+2b)\right]z$$

$$\left[(z-1)^2(z-b)\right]C(z)=2z^3-2\left[1+b\right]z^2+\left[1+2b-2\right]z$$

Sostituendo i valori numerici si ricava la Z-trasformata dell'evoluzione libera del sistema

$$C(z)=\frac{2z^3-2\left[1+b\right]z^2+\left[1+2b-2\right]z}{(z-1)^2(z-b)}$$

$$C(z)=\frac{2z^3-2.4z^2-0.6z}{(z-1)^2(z-0.2)}\,.$$

Valuti la risposta temporale sfruttando l'integrale di inversione

$$X(z)=C(z)z^{k-1}=\frac{2z^2-2.4z-0.6}{(z-1)^2(z-0.2)}z^k\,.$$

E' evidente che non vi siano valori particolari di *k*da considerare.

$$R_1 = \lim_{z\to 1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-1)^2\frac{2z^2-2.4z-0.6}{(z-1)^2(z-0.2)}z^k\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{2z^{k+2}-2.4z^{k+1}-0.6z^k}{z-0.2}\right]$$

$$= \lim_{z\to 1}\left[\frac{\left[(k+2)2z^{k+1}-(k+1)2.4z^k-k0.6z^{k-1}\right](z-0.2)-2z^{k+2}+2.4z^{k+1}+0.6z^k}{(z-0.2)^2}\right]$$

$$= \frac{\left[(k+2)2-(k+1)2.4-k0.6\right]0.8+1}{(0.8)^2} = \frac{\left[2k+4-2.4k-2.4-k0.6\right]0.8+1}{(0.8)^2}$$

$$= \frac{\left[1.6-k\right]0.8+1}{(0.8)^2} = \frac{2.28-0.8k}{(0.8)^2} = 3.5625-1.25k$$

$$R_2 = \lim_{z\to 0.2}\left[(z-0.2)\frac{2z^2-2.4z-0.6}{(z-1)^2(z-0.2)}z^k\right] = \lim_{z\to 0.2}\left[\frac{2z^2-2.4z-0.6}{(z-1)^2}z^k\right]$$

$$= \frac{2(0.2)^2-2.4\cdot 0.2-0.6}{(0.2-1)^2}0.2^k = \frac{2(0.2)^2-2.4\cdot 0.2-0.6}{0.8^2}0.2^k = -1.5625\cdot 0.2^k$$

La risposta complessiva sarà

$c(k) = 3.5625-1.25k-1.5625\cdot 0.2^k$