UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

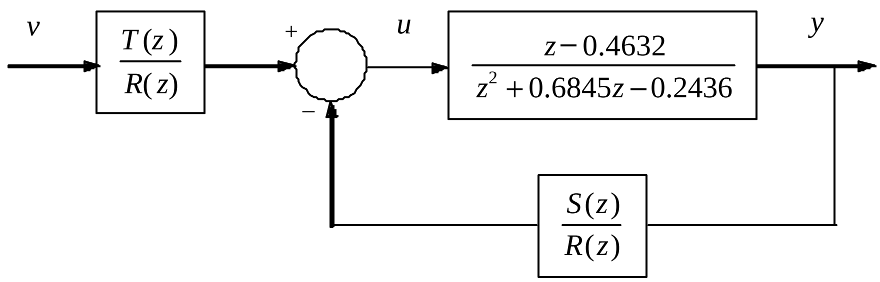
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

14/2/03

PARTE I

a) Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 0.3\,\mathrm{s}$, si chiede di sintetizzare, mediante la diofantea, i tre polinomi del controllore $R(z), S(z), T(z)$ in modo tale che il sistema controllato soddisfi le seguenti specifiche:

1) Massima sovraelongazione in risposta al gradino S=10%;
2) Tempo di assestamento al 5% in risposta al gradino $T_a = 2$ s.
3) Il polinomio $R(z)$ presenti un termine integrale;
4) Per ovviare alla possibile presenza di disturbi sull'uscita y il polinomio dell'osservatore A_0 presenti un polo tale da tagliare i disturbi le cui pulsazioni siano superiori a $w = 3$.

Si valuti se il tempo di campionamento adottato è appropriato.

Soluzione Parte I

Cominciamo fissando la funzione di trasferimento ad anello chiuso che soddisfi le specifiche imposte, ovvero la $G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$.

Utilizzando la specifica sulla massima sovraelongazione ricaviamo il d dei poli dominanti:

$$d = \sqrt{\frac{\ln(S/100)^2}{\ln(S/100)^2 + p^2}} = \sqrt{\frac{\ln(0.1)^2}{\ln(0.1)^2 + p^2}} = 0.5912.$$

Utilizzando la specifica sul tempo di assestamento al 5% ricaviamo l' w_n dei poli dominanti:

$$w_n = \frac{3}{dT_a} = \frac{3}{0.5912*2} = 2.5374.$$

Grazie a queste informazioni siamo in grado di fissare il polinomio caratteristico del sistema retroazionato:

$$Q(z) = z^2 - 2e^{-dw_nT}\cos\left(w_nT\sqrt{1-d^2}\right)z + e^{-2dw_nT} = z^2 - 1.0424z + 0.4066 = z^2 + p_1z + p_0.$$

Per poter definire completamente la $G_m(z)$ occorre decidere quale parte di $B(z)$ sia cancellabile:

$$B^- = 1$$

$$B^+ = z - 0.4632$$

Vista la scelta appena fatta avremo

$$G_m(z) = \frac{Q(1)B^-(z)}{B^-(1)Q(z)}z^k = \frac{1 + p_1 + p_0}{z^2 + p_1z + p_0}z = \frac{0.3642z}{z^2 - 1.0424z + 0.4066} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}.$$

Si noti che è stato fissato $k = 1$ in modo che il grado relativo della $G_m(z)$ sia lo stesso dell'impianto da controllare.

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea

La richiesta della presenza di un termine integrale in $R(z)$ impone di fissare $q = 1$.

grado(S)=grado(A)+q-1=2+1-1=2

grado(R")= grado(A) - grado(B^+)-1=2-1-1=0

grado(A_0)= 2 grado(A) - grado(B^+) - grado(A_m)+q-1=4-1-2+1-1=1.

Prima di poter impostare la diofantea è necessario fissare anche il polinomio $A_0(z)$. Poiché si vuole introdurre un polo dell'osservatore che filtri le pulsazioni superiori a $w = 3$ si impone per $A_0(z)$ un comportamento analogo a un polinomio del tipo $A_0(s) = (s + w) = (s + 3)$. Di conseguenza l'equivalente discreto sarà

$$A_0(z) = z - e^{-wT} = z - e^{-0.3\cdot 3} = z - 0.4066 = z + p_2.$$

L'equazione diofantea sarà del tipo:

$$A(z)R''(z)(z-1) + B^-(z)S(z) = A_0(z)A_m(z)$$

$$(z^2 + a_1z + a_0)(z-1)r_0 + (s_0 + s_1z + s_2z^2) = (z + p_2)\left(z^2 + p_1z + p_0\right)$$

$$r_0z^3 + (a_1r_0 - r_0 + s_2)z^2 + (a_0r_0 - a_1r_0 + s_1)z - a_0r_0 + s_0 = z^3 + (p_1 + p_2)z^2 + (p_1p_2 + p_0)z + p_0p_2$$

che può essere risolto attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ a_1 - 1 + s_2 = p_1 + p_2 \\ a_0 - a_1 + s_1 = p_1p_2 + p_0 \\ -a_0 + s_0 = p_0p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_2 = p_1 + p_2 - a_1 + 1 \\ s_1 = p_1p_2 + p_0 - a_0 + a_1 \\ s_0 = p_0p_2 + a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_0 = 1 \\ s_2 = -1.1334 \\ s_1 = 1.7585 \\ s_0 = -0.4089 \end{cases}$$

Il polinomio $R(z)$ varrà dunque

$R(z) = R''(z)B^{+}(z)(z-1) = (z-0.4632)(z-1) = z^2 - 1.4632z + 0.4632$.

Manca ancora il calcolo di T. Sappiamo che $B_m(z) = B^{-}(z)B_m^{'}(z) = B_m^{'}(z) = 0.3642z$. Di conseguenza

$T = B_m^{'}(z)\,A_0(z) = 0.3642z\,(z-0.4066) = 0.3642z^2 - 0.1481z$.

L'equazione del regolatore sarà dunque

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)}V(z) - \frac{S(z)}{R(z)}Y(z) = \frac{0.3642z^2 - 0.1481z}{z^2 - 1.4632z + 0.4632}V(z) + \frac{1.1334z^2 - 1.7585z + 0.4089}{z^2 - 1.4632z + 0.4632}Y(z)$$

$$U(z^{-1}) = \frac{0.3642 - 0.1481z^{-1}}{1 - 1.4632z^{-1} + 0.4632z^{-2}}V(z^{-1}) + \frac{1.1334 - 1.7585z^{-1} + 0.4089z^{-2}}{1 - 1.4632z^{-1} + 0.4632z^{-2}}Y(z^{-1})$$

che, antitrasformata, rende

$$u(k) = 1.4632u(k-1) - 0.4632u(k-2) + 0.3642v(k) - 0.1481v(k-1)$$
$$+1.1334y(k) - 1.7585y(k-1) + 0.4089y(k-2).$$

La specifica sul polinomio dell'osservatore $A_0(z)$ impone di fissare un polo in corrispondenza della pulsazione $w = 3$. Tale pulsazione è al di sotto della pulsazione di Nyquist $p/T = 3.1415/0.3 = 10.47$ per cui la dinamica dell'osservatore è implementabile con il tempo di campionamento scelto. Per finire, il tempo di campionamento risulta assolutamente compatibile con il tempo di assestamento assegnato: ciò garantisce implicitamente che la dinamica dei poli di $G_m(z)$ risulterà implementabile.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

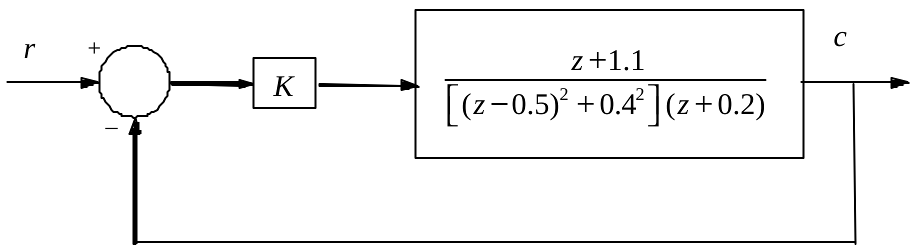
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

14/2/03

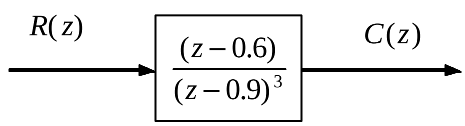
PARTE II

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante l'uso della bilineare e del criterio di Routh-Hurwitz al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione libera dell'uscita $c(k)$ del sistema sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono: $c(0)=0$; $c(1)=1$; $c(2)=1$.

(Suggerimento: $Z^{-1}\left\{\dfrac{2a^2z}{(z-a)^3}\right\}=(k^2-k)a^k; Z^{-1}\left\{\dfrac{az}{(z-a)^2}\right\}=ka^k;\quad Z^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-a}\right\}=a^k$)

Soluzione Parte II

Quesito a:

Ricaviamo il polinomio caratteristico del sistema

$$1+K\frac{z+1.1}{\left[(z-0.5)^2+0.4^2\right](z+0.2)}=0$$

$$(z^2-z+0.25+0.16)(z+0.2)+Kz+1.1K=0$$

$$(z^2-z+0.41)(z+0.2)+Kz+1.1K=0$$

$$(z^3-0.8z^2+0.21z+0.082)+Kz+1.1K=0$$

$$z^3-0.8z^2+(0.21+k)z+0.082+1.1K=0$$

Trasformiamo il polinomio caratteristico utilizzando l'equazione bilineare $z=\frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3-0.8\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2+(0.21+K)\left(\frac{1+w}{1-w}\right)+0.082+1.1K=0$$

$$(1+w)^3-0.8(1+w)^2(1-w)+(0.21+K)(1+w)(1-w)^2+(0.082+1.1K)(1-w)^3=0$$

$$\begin{aligned}&\left(1+3w+3w^2+w^3\right)-0.8\left(1+2w+w^2\right)(1-w)\\&\qquad+(0.21+K)(1+w)\left(1-2w+w^2\right)+(0.082+1.1K)\left(1-3w+3w^2+w^3\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(1+3w+3w^2+w^3\right)-0.8\left(1+w-w^2-w^3\right)\\&\qquad+(0.21+K)\left(1-w-w^2+w^3\right)+(0.082+1.1K)\left(1-3w+3w^2+w^3\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&w^3\left(1+0.8+0.21+K-0.082-1.1K\right)\\&\qquad+w^2\left(3+0.8-0.21-K+0.246+3.3K\right)\\&\qquad+w\left(3-0.8-0.21-K-0.246-3.3K\right)\\&\qquad+\left(1-0.8+0.21+K+0.082+1.1K\right)=0\end{aligned}$$

$$w^3\left(1.9280-0.1K\right)+w^2\left(3.8360+2.3K\right)+w\left(1.7440-4.3K\right)+\left(0.4920+2.1K\right)=0$$

Verifichiamo la positività di tutti i termini del polinomio caratteristico trasformato

$$\begin{cases}1.9280-0.1K>0\\3.8360+2.3K>0\\1.7440-4.3K>0\\0.4920+2.1K>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K<\dfrac{1.9280}{0.1}=19.28\\K>-\dfrac{3.8360}{2.3}=-1.6678\\K<\dfrac{1.7440}{4.3}=0.4056\\K>-\dfrac{0.4920}{2.1}=-0.2343\end{cases}\tag{1.1}$$

Riassumendo tutti i termini sono positivi se

$$-0.2343<K<0.4056\tag{1.2}$$

Passiamo alla costruzione della tabella di Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|ll} 3 & 1.9280-0.1K & 1.7440-4.3K \\ 2 & 3.8360+2.3K & 0.4920+2.1K \\ 1 & a(K) & \\ 0 & 0.4920+2.1K & \end{array}$$

dove $a(K)=(1.7440-4.3K)(3.8360+2.3K)-(1.9280-0.1K)(0.4920+2.1K)=$

$$= 5.74140800-16.48320K-9.68K^2$$

Se le relazioni (1.1) sono tutte soddisfatte allora i primi elementi delle righe 3, 2 e 0 sono senz'altro positivi. Per avere la stabilità garantita deve essere positivo anche $a(K)$.

$$K_{1,2}=-\frac{16.48320\pm\sqrt{16.48320^2+4\cdot 5.741408\cdot 9.68}}{2\cdot 9.68}=\begin{cases}K_1=-1.999\\ K_2=0.2966\end{cases}\Rightarrow -1.999<K<0.2966$$

Confrontando questo risultato con il risultato della (1.2) si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per

$$-0.2343<K<0.2966. \tag{1.3}$$

Altre regioni di stabilità si potrebbero avere con tutti i termini del polinomio caratteristico negativi ovvero con

$$\begin{cases}1.9280-0.1K<0\\ 3.8360+2.3K<0\\ 1.7440-4.3K<0\\ 0.4920+2.1K<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}K>\dfrac{1.9280}{0.1}=19.28\\ K<-\dfrac{3.8360}{2.3}=-1.6678\\ K>\dfrac{1.7440}{4.3}=0.4056\\ K<-\dfrac{0.4920}{2.1}=-0.2343\end{cases}$$

Si vede immediatamente che tutte queste condizioni non possono essere mai verificate simultaneamente per cui concludiamo che non vi sono altre regioni di stabilità se non quella relativa all'equazione (1.3).

Quesito b:

Si riscrive la funzione di trasferimento in forma simbolica

$$C(z)=\frac{(z-0.6)}{(z-0.9)^3}R(z)=\frac{(z-b)}{(z-a)^3}R(z)$$

Si risale all'equazione alle differenze del sistema

$$C(z)(z^3-3az^2+3a^2z-a^3)=R(z)(z-b)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k+3)-3ac(k+2)+3a^2c(k+1)-a^3c(k)=r(k+1)-br(k)$$

Si ritrasforma tenendo conto delle condizioni iniziali.

$$\mathcal{Z}\left\{c(k+3)-3ac(k+2)+3a^2c(k+1)-a^3c(k)=r(k+1)-br(k)\right\}$$

$$z^3C(z)-z^3c(0)-z^2c(1)-zc(2)-3a\left[z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)\right]+3a^2\left[zC(z)-zc(0)\right]-a^3C(z)$$
$$=zR(z)-zr(0)-bR(z)$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali imposte e annullando il termine destro dell'equazione in quanto è stata richiesta l'evoluzione libera, si ottiene l'equazione semplificata

$$z^3C(z)-z^2-z-3a\left[z^2C(z)-z\right]+3a^2zC(z)-a^3C(z)=0$$

$$\left[z^3-3az^2+3a^2z-a^3\right]C(z)=z^2+z-3az=z(z+1-3a)$$

$$(z-a)^3C(z)=z(z+1-3a)$$

Sostituendo i valori numerici si ricava la Z-trasformata dell'evoluzione libera del sistema

$$C(z)=\frac{z(z+1-3a)}{(z-a)^3}$$

$$C(z)=\frac{z(z-1.7)}{(z-0.9)^3}=-\frac{0.8z}{(z-0.9)^3}+\frac{z}{(z-0.9)^2}=-\frac{0.8}{2\cdot 0.9^2}\frac{2\cdot 0.9^2z}{(z-0.9)^3}+\frac{1}{0.9}\frac{0.9z}{(z-0.9)^2}$$

Antitrasformando si ricava infine

$$c(k)=-\frac{0.4}{0.9^2}(k^2-k)0.9^k+\frac{1}{0.9}k\cdot 0.9^k=-0.4(k^2-k)0.9^{k-2}+k\cdot 0.9^{k-1}.$$

Usandondo invece l'integrale di inversione si sarebbe ottenuto

$$c(k)=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left((z-0.9)^3\frac{z(z-1.7)}{(z-0.9)^3}z^{k-1}\right)\right]\Bigg|_{z=0.9}=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{k+1}-1.7z^k\right)\right]\Bigg|_{z=0.9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\left((k+1)z^k-k1.7z^{k-1}\right)\right]\Bigg|_{z=0.9}=\frac{1}{2}\left[k(k+1)z^{k-1}-k(k-1)1.7z^{k-2}\right]\Big|_{z=0.9}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[k(k+1)0.9^{k-1}-1.7\cdot k(k-1)0.9^{k-2}\right].$$

Nonostante l'apparente diversità le due relazioni danno luogo alla stessa sequenza $c(k)$. Utilizzando altri tipi di scomposizioni in fratti semplici si sarebbero pervenuti a soluzioni ancora diverse ma comunque corrette.