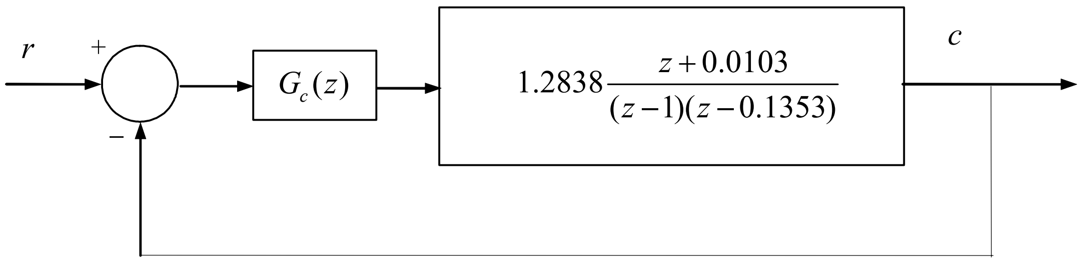
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

17/9/03

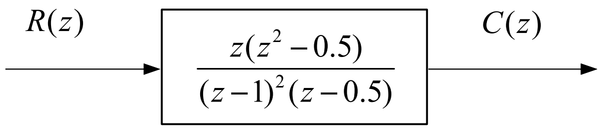
PARTE A - I

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di progettare il controllore $G_c(z)$ in modo tale che la risposta <u>alla rampa</u> del sistema retroazionato sia di tipo deadbeat.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione libera dell'uscita $c(k)$ del sistema sapendo che le condizioni iniziali per l'uscita sono:

$c(0)=2$; $c(1)=2$; $c(2)=1$.

(Suggerimento: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\}=k$; $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=1$; $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^k$)

Soluzione Parte A-I

Quesito a:

Impostiamo i polinomi:

$B^- = 1.2838(z + 0.0103) = K(z + a)$

$B^+ = 1$

$A^- = (z - 1)$

$A^+ = (z - 0.1353) = (z - b)$

Visto che l'errore alla rampa deve essere nullo e che nell'impianto è già presente un integratore, per ottenere un comportamento di tipo deadbeat poniamo $q = 1$.

Calcoliamo i gradi dell'equazione Diofantea
grado(S')=1+1-1=1
grado(R")=2-0-1=1
grado(A_m)=1+2-0-1+1=3
E' previsto quindi un aggancio del riferimento al gradino in tre soli passi di campionamento.

Impostiamo l'equazione Diofantea:

$(z-1)(r_0 + r_1 z)(z-1) + k(z+a)(s_0 + s_1 z) = z^3$

$r_1 z^3 + (r_0 - 2r_1)z^2 + (r_1 - 2r_0)z + r_0 + Ks_1 z^2 + K(s_0 + a s_1) + Ka\, s_0 = z^3$

che può essere risolto attraverso il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 - 2r_1 + Ks_1 = 0 \\ r_1\beta - 2r_0 + Ks_0 + Ka\, s_1 = 0 \\ r_0 + Ka\, s_0 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione ricaviamo

$Ks_1 = 2 - r_0$

che sostituita nella terza consente di scrivere

$Ks_0 - 2r_0 + 2a - ar_0 + 1 = 0$.

Utilizzando anche la quarta relazione si ottiene

$Ks_0 + 2Ka\, s_0 + 2a + Ka^2 s_0 + 1 = 0$

che riordinata rende

$(K + 2Ka + Ka^2) s_0 = -(2a + 1)$

da cui, infine, si ricava

$$s_0 = -\frac{2a+1}{K + 2Ka + Ka^2} = -0.7789$$

Inoltre

$$r_0 = -Ka\, s_0 = Ka\frac{2a+1}{K + 2Ka + Ka^2} = \frac{2a^2 + a}{1 + 2a + a^2} = 0.0102989 \cong 0.0103;$$

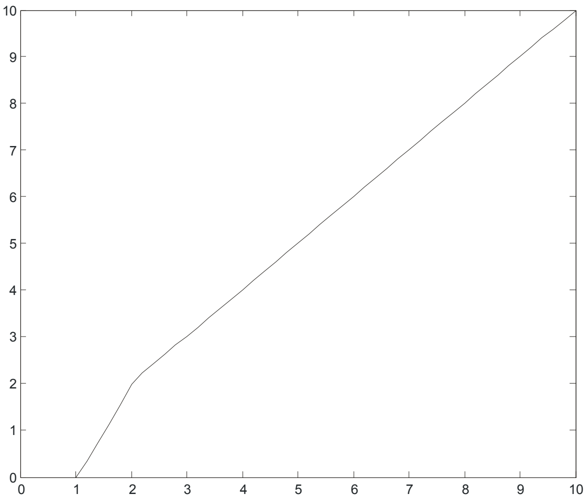
$$s_1 = \frac{2 - r_0}{K} = 1.5499$$

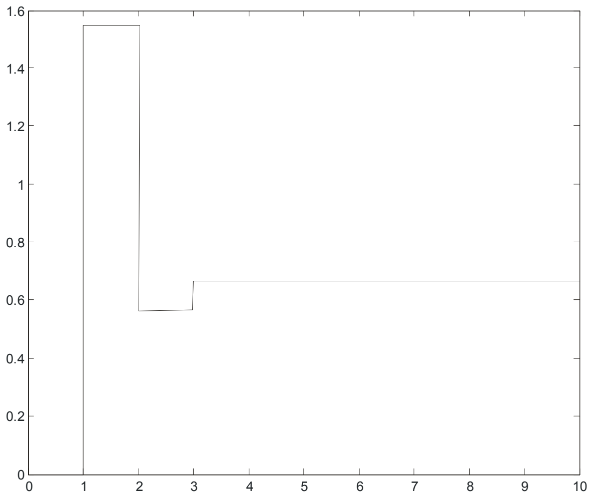
L'equazione del regolatore deadbeat sarà dunque

$$G_c(z) = \frac{(z-0.1353)(-0.7789 + 1.5499z)}{(z-1)(z+0.0103)} = 1.5499\frac{(z-0.1353)(z-0.5025)}{(z-1)(z+0.0103)}.$$

Osservando il regolatore si nota che, come desiderato, cancella esattamente il polo in $z = 0.1353$ ma che stranamente cancella anche lo zero in $z = -0.0103$ che, in teoria, sarebbe dovuto risultare incancellabile. Nella realtà tale cancellazione è solo apparente in quanto il valore reale di r_0 non è pari ad $a = 0.0103$ bensì è pari a $\dfrac{2a^2 + a}{1 + 2a + a^2} = 0.0102989$. In pratica applicando correttamente la tecnica della diofantea possiamo evitare le cancellazioni esatte tra poli e zeri quando queste non sono desiderate ma non possiamo in alcun modo evitare delle quasi-cancellazioni che dovessero risultare dallo sviluppo dei calcoli.

Per concludere si riportano nel seguito l'andamento del segnale di uscita dell'impianto $\left[G(s) = \dfrac{s+3}{s(s+2)} \right.$ con tempo di campionamento $\left. T\text{=1s} \right]$ e il segnale di comando dello stesso. Come desiderato la rampa di uscita viene agganciata esattamente dopo tre passi di campionamento e, sempre dopo tre passi di campionamento, il transitorio del segnale di comando si esaurisce.





Quesito b:

Si riscrive la funzione di trasferimento in forma simbolica

$$C(z) = \frac{z(z^2 - 0.5)}{(z-1)^2 (z - 0.5)} R(z) = \frac{z(z^2 - a)}{(z-1)^2 (z-a)} R(z)$$

Si risale all'equazione alle differenze del sistema

$$C(z)\left[(z^2 - 2z + 1)(z - a) \right] = R(z)\left[z(z^2 - a) \right]$$

$$C(z)\left[z^3 - (a+2)z^2 + (1+2a)z - a \right] = R(z)(z^3 - az)$$

$$\Downarrow$$

$$c(k+3) - (a+2)\,c(k+2) + (1+2a)\,c(k+1) - a\,c(k) = r(k+3) - a\,r(k+1)$$

Si ritrasforma tenendo conto delle condizioni iniziali. Poiché interessa la sola evoluzione libera del sistema si eguaglia a zero il lato destro della equazione

$$\mathcal{Z}\left\{ c(k+3) - (a+2)\,c(k+2) + (1+2a)\,c(k+1) - a\,c(k) \right\} = 0$$

$$z^3 C(z) - z^3 c(0) - z^2 c(1) - zc(2) - (a+2)\left[z^2 C(z) - z^2 c(0) - zc(1) \right] + (1+2a)\left[z\,C(z) - zc(0) \right] - a\,C(z) = 0$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali imposte si ottiene l'equazione semplificata

$$z^3C(z)-2z^3-2z^2-z-(a+2)\left[z^2C(z)-2z^2-2z\right]+(1+2a)\left[z\,C(z)-2z\right]-a\,C(z)=0$$
$$\left[z^3-(a+2)z^2+(1+2a)z-a\right]C(z)=2z^3+2z^2+z+(a+2)\left[-2z^2-2z\right]+2z(1+2a)$$
$$\left[(z-1)^2(z-a)\right]C(z)=2z^3+\left[2-2(a+2)\right]z^2+\left[1-2(a+2)+2(1+2a)\right]z$$
$$\left[(z-1)^2(z-a)\right]C(z)=2z^3-2\left[1+a\right]z^2+\left[1+2a-2\right]z$$

Sostituendo i valori numerici si ricava la Z-trasformata dell'evoluzione libera del sistema

$$C(z)=\frac{2z^3-2\left[1+a\right]z^2+\left[1+2a-2\right]z}{(z-1)^2(z-a)}$$
$$C(z)=\frac{2z^3-3z^2}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

La scomposizione in fratti semplici richiede questa volta di prendere qualche precauzione in quanto il rapporto non è né proprio né composto da polinomi monici. Si scompone al suo posto la relazione

$$\frac{C(z)}{2z}=\frac{z^2-1.5z}{(z-1)^2(z-0.5)}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-0.5}.$$

Si calcolano i tre coefficienti

$$A=\lim_{z\to1}(z-1)^2\frac{z^2-1.5z}{(z-1)^2(z-0.5)}=\frac{1-1.5}{1-0.5}=-1$$

$$C=\lim_{z\to0.5}(z-0.5)\frac{z^2-1.5z}{(z-1)^2(z-0.5)}=\frac{0.5^2-1.5\cdot0.5}{(0.5-1)^2}=\frac{0.5-1.5}{0.5}=-2.$$

Visto che il grado relativo tra i due polinomi è pari a 1, il teorema dei residui permette di scrivere $B+C=1$ e quindi $B=3$.

Riassumendo

$$C(z)=-\frac{2z}{(z-1)^2}+\frac{6z}{z-1}-\frac{4z}{z-0.5}$$

Antitrasformando si ricava infine

$$c(k)=-2\,k+6-4\cdot(0.5)^k.$$

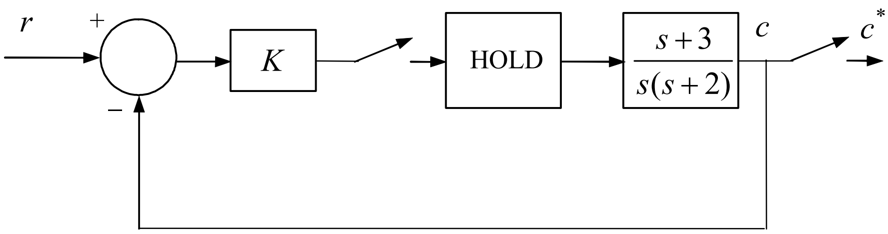
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

17/9/03

PARTE A - II

Sia dato il seguente sistema chiuso in retroazione unitaria:



Sapendo che il tempo di campionamento del sistema è $T = 1\mathrm{s}$ si chiede di valutare:

1) La funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso r e l'uscita c^*;

2) La stabilità asintotica del sistema retroazionato al variare di $K \in [-\infty, \infty]$ mediante la trasformazione bilineare e il criterio di Routh-Hurwitz.

(Suggerimento: $Z\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$; $Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}$; $Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$)

Soluzione Parte A-II

Quesito 1:

Si indichi con H la funzione di trasferimento del dispositivo di Hold e con G la funzione di trasferimento dell'impianto. La relazione tra ingresso e uscita sarà del tipo

$$C = \frac{KHGR}{1+KHG}.$$

Passiamo alle Z-trasformate analizzando i termini al numeratore. Tra i blocchi H e G non vi è alcun campionatore e quindi i due blocchi andranno accorpati tra loro al momento di calcolarne la funzione di trasferimento discreta. Allo stesso modo il blocco K è accorpabile al blocco R ma i due non potranno essere accorpati ad HG in quanto dopo il blocco K vi è un campionatore (realtà, poiché K è un guadagno puro non ha alcuna importanza accorparlo a R). Passando al denominatore abbiamo una situazione analoga.

In conclusione la relazione ingresso-uscita del sistema retroazionato sarà del tipo

$$C(z) = \frac{HG(z)}{1+HG(z)\,K} K\,R(z) = G_0(z)R(z).$$

Calcoliamo la $HG(z)$ ricordando che per il dispositivo di hold la funzione di trasferimento equivalente è data da $H(s) = \dfrac{1-e^{-sT}}{s}$.

$$KHG(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}\, Z\left\{\frac{s+3}{s^2(s+2)}\right\} = \frac{z-1}{z}\, Z\left\{\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+2}\right\}.$$

Il calcolo dei coefficienti della scomposizione in fratti semplici è immediato

$$A = s^2 \left.\frac{s+3}{s^2(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$C = (s+2)\left.\frac{s+3}{s^2(s+2)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

Poiché il grado relativo del sistema è pari a due, il teorema dei residui permette di scrivere

$$B = -C = -\frac{1}{4}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} HG(z) &= \frac{z-1}{z}\left\{\frac{3}{2}\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right\} \\ &= \frac{z-1}{z}\left\{\frac{6Tz(z-e^{-2T}) - (z-1)(z-e^{-2T})z + (z-1)^2 z}{4(z-1)^2(z-e^{-2T})}\right\} \\ &= \frac{(6T+e^{-2T}-1)z + (1-6Te^{-2T}-e^{-2T})}{4(z-1)(z-e^{-2T})} \end{aligned}$$

Ricordando infine che $T = 1\text{s}$ si ottiene

$$HG(z) = \frac{(5+e^{-2})z + (1-7e^{-2})}{4(z-1)(z-e^{-2})}.$$

Il sistema ad anello chiuso avrà quindi funzione di trasferimento

$$G_0(z) = \frac{\dfrac{(5+e^{-2})z+(1-7e^{-2})}{4(z-1)(z-e^{-2})}K}{1+\dfrac{(5+e^{-2})z+(1-7e^{-2})}{4(z-1)(z-e^{-2})}K}$$
$$= \frac{\left[(5+e^{-2})z+(1-7e^{-2})\right]K}{4(z-1)(z-e^{-2})+\left[(5+e^{-2})z+(1-7e^{-2})\right]K}$$
$$= \frac{\left[(5+e^{-2})\,z+(1-7e^{-2})\right]K}{4z^2+\left[(5+e^{-2})\,K-4-4e^{-2}\right]z+(1-7e^{-2})\,K+4e^{-2}}$$
$$= \frac{\left[5.1353\,z+0.0527\right]K}{4z^2+\left[5.1353\,K-4.5413\right]z+0.0527\,K+0.5413}.$$

Quesito 2:

Si consideri il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione e esegua un cambio di variabile mediante la bilineare: $z=\dfrac{1+w}{1-w}$. Si otterrà

$$P(z) = 4z^2+\left[5.1353\,K-4.5413\right]z+0.0527\,K+0.5413$$
$$\Downarrow$$
$$P(w) = 4\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2+\left[5.1353\,K-4.5413\right]\left(\frac{1+w}{1-w}\right)+0.0527\,K+0.5413$$
$$P(w) = 4\left(1+w\right)^2+\left[5.1353\,K-4.5413\right]\left(1+w\right)\left(1-w\right)+\left(0.0527\,K+0.5413\right)\left(1-w\right)^2$$
$$P(w) = 4\left(1+2w+w^2\right)+\left[5.1353\,K-4.5413\right]\left(1-w^2\right)+\left(0.0527\,K+0.5413\right)\left(1-2w+w^2\right)$$
$$P(w) = \left(9.0826-5.0826\,K\right)w^2+\left(6.9174-0.1054\,K\right)w+5.1880\,K$$

Poiché il polinomio caratteristico ottenuto è del secondo ordine non risulta necessario costruire la tabella di Routh-Hurwitz: condizione necessaria e sufficiente perché si abbia la stabilità è che tutti i coefficienti del polinomio abbiano lo stesso segno. Verifichiamo cosa accade nel caso in cui siano tutti e tre positivi:

$$\begin{cases} 9.0826-5.0826\,K>0 \\ 6.9174-0.1054\,K>0 \\ 5.1880\,K>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K<\dfrac{9.0826}{5.0826}=1.7870 \\ K<\dfrac{6.9174}{0.1054}=65.63 \\ K>0 \end{cases}$$

Il sistema risulta stabile per $0<K<1.7870$. Passando al caso in cui tutti e tre i coefficienti risultano negativi

$$\begin{cases} 9.0826 - 5.0826\,K < 0 \\ 6.9174 - 0.1054\,K < 0 \\ 5.1880\,K < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > \dfrac{9.0826}{5.0826} = 1.7870 \\ K > \dfrac{6.9174}{0.1054} = 65.63 \\ K < 0 \end{cases}$$

In questo secondo caso il sistema non è mai verificato.

In conclusione il sistema risulta asintoticamente stabile solo entro l'intervallo

$$0 < K < 1.7870$$