UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

18/06/03

PARTE A-I

a) Sia assegnato un segnale continuo la cui trasformata di Laplace sia espressa dalla seguente funzione

$$X(s) = \frac{3(1-e^{-4s})}{s(s+4)}$$

Si chiede di valutarne la $\mathcal{Z}$-trasformata ipotizzando un tempo di campionamento $T = 1\,\mathrm{s}$.

b) Sia assegnato un segnale discreto la cui $\mathcal{Z}$-trasformata sia espressa dalla funzione

$$X(z) = \frac{1}{z(z-0.8)}$$

Si chiede di valutarne l'antitrasformata usando la tecnica dell'integrale di inversione, prestando attenzione ai casi particolari che si hanno per $k = 0$ e $k = 1$.

Soluzione parte A-I:

Quesito a

Osservando l'espressione del segnale $X(s)$ si nota che è composto da due termini di cui uno contente un ritardo finito di 4 secondi (ovvero quattro passi di campionamento). Si scomponga pertanto $X(s)$ nel seguente modo

$$X(s) = \frac{3(1-e^{-4s})}{s(s+4)} = \frac{3}{s(s+4)} - \frac{3e^{-4s}}{s(s+4)} = X_1(s) - X_1(s)e^{-4s}$$

dove si è posto $X_1(s) = \frac{3}{s(s+4)}$.

Si antitrasformi $X_1(s)$ ricorrendo alla scomposizione in fratti semplici

$$X_1(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+4}$$

con

$$a = \lim_{s\to 0} s\, X_1(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{3}{s(s+4)} = \frac{3}{4}$$

$$b = \lim_{s\to -4} (s+4)\, X_1(s) = \lim_{s\to -4} (s+4) \frac{3}{s(s+4)} = -\frac{3}{4}.$$

Si calcoli $X_1(z)$

$$X_1(z) = Z\{X_1(s)\} = Z\left\{\frac{3}{4}\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+4}\right\} = \frac{3}{4}\frac{z}{z-1} - \frac{3}{4}\frac{z}{z-e^{-4T}}.$$

Ricordando che $T = 1$s si ricava

$$X_1(z) = \frac{3}{4}\frac{z^2 - z e^{-4} - z^2 + z}{(z-1)(z-e^{-4})} = \frac{3}{4}\frac{z(1-e^{-4})}{(z-1)(z-e^{-4})}.$$

Tornando al problema originario e notando che il secondo termine della $X(s)$ è dato dal segnale $X_1(s)$ ritardato di un periodo pari a quattro campioni, si ottiene

$$X(z) = Z\{X(s)\} = Z\{X_1(s) - X_1(s)e^{-4s}\} = Z\{X_1(s)\} - z^{-4} Z\{X_1(s)\} = (1-z^{-4})\, Z\{X_1(s)\} = \frac{z^4-1}{z^4} Z\{X_1(s)\}$$

e pertanto

$$X(z) = \frac{3}{4}\frac{z(z^4-1)(1-e^{-4})}{z^4(z-1)(z-e^{-4})} = \frac{3}{4}\frac{(z^4-1)(1-e^{-4})}{z^3(z-1)(z-e^{-4})} = 0.7363\frac{(z^4-1)}{z^3(z-1)(z-0.0183)}$$

Quesito b

La tecnica dell'integrale di inversione richiede che si valutino i residui della funzione

$$X(z)\, z^{k-1} = \frac{z^{k-1}}{z(z-0.8)} = \frac{z^{k-2}}{(z-0.8)}.$$

Si noti che per $k = 0$ la funzione presenta un polo doppio nell'origine

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad X(z)\, z^{k-1} = \frac{1}{z^2(z-0.8)},$$

per $k = 1$ presenta un polo semplice nell'origine

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad X(z)\, z^{k-1} = \frac{1}{z(z-0.8)}$$

mentre per $k > 1$ non presenta alcun polo nell'origine

$$k > 1 \quad \Rightarrow \quad X(z)\, z^{k-1} = \frac{z^{k-2}}{(z-0.8)}.$$

Poiché le tre espressioni contengono un numero diverso di poli, si dovranno svolgere tre diversi calcoli dei residui.

1) $k = 0$;

Si calcolino i residui in $z = 0$ e in $z = 0.8$

$$\operatorname{Res}(0) = \left[\frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{1}{z^2(z-0.8)}\right)\right]_{z=0} = \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-0.8)}\right)\right]_{z=0} = \left[-\frac{1}{(z-0.8)^2}\right]_{z=0} = -\frac{1}{0.8^2} = -\frac{1}{0.64},$$

$$\operatorname{Res}(0.8) = \left[(z-0.8)\frac{1}{z^2(z-0.8)}\right]_{z=0.8} = \left[\frac{1}{z^2}\right]_{z=0.8} = \frac{1}{0.8^2} = \frac{1}{0.64}.$$

Ricordando che $x(k) = \sum_i \operatorname{Res}(z_i)$ si potrà scrivere

$x(0) = \operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(0.8) = 0$.

2) $k = 1$;

Si calcolino i residui in $z = 0$ e in $z = 0.8$

$$\operatorname{Res}(0) = \left[z\frac{1}{z(z-0.8)}\right]_{z=0} = \left[\frac{1}{(z-0.8)}\right]_{z=0} = -\frac{1}{0.8},$$

$$\operatorname{Res}(0.8) = \left[(z-0.8)\frac{1}{z(z-0.8)}\right]_{z=0.8} = \left[\frac{1}{z}\right]_{z=0.8} = \frac{1}{0.8}.$$

Anche in questo caso si potrà scrivere

$x(1) = \operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(0.8) = 0$.

Entrambi i risultati riportati ai punti 1) e 2) erano prevedibili poiché convertendo la $X(z)$ nella forma alternativa $X(z^{-1})$ si ottiene

$$X(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{1-0.8z^{-1}}.$$

Ovviamente quella ottenuta è una funzione ritardata di due campioni per cui $x(0) = x(1) = 0$.

3) $k > 1$;

In quest'ultimo caso la funzione $X(z)\,z^{k-1}$ non possiede poli nell'origine per cui

$$\operatorname{Res}(0.8) = \left[(z-0.8)\frac{z^{k-2}}{(z-0.8)}\right]_{z=0.8} = \left[z^{k-2}\right]_{z=0.8} = 0.8^{k-2}.$$

L'espressione finale dell'antitrasformata ottenuta tenendo conto dei tre risultati sarà quindi

$x(k) = h(k-2)\,0.8^{k-2}$

dove con $h(k-2)$ è stata indicata la sequenza di impulsi unitaria ritardata di due campioni.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

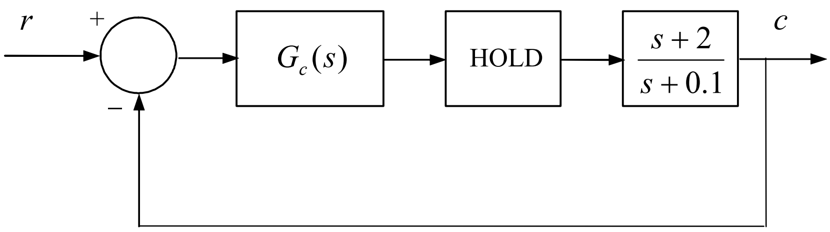
FACOLTA' DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

18/06/03

PARTE A-II

a) Si consideri lo schema in retroazione unitaria riportato in figura



Si voglia progettare un regolatore digitale mediante l'uso delle tecniche di discretizzazione dei regolatori continui. A tal fine si ricavino i coefficienti del regolatore continuo $G_c(s) = k\,\frac{s+\alpha}{s(s+\beta)}$ che soddisfi le seguenti specifiche:

1) Sovraelongazione in risposta al gradino: S=10%;
2) Tempo di assestamento al 5%: T_a=10 s

Nello svolgere il progetto si tenga conto della presenza del dispositivo di hold e si ipotizzi un tempo di campionamento T=1 s.

b) Si discretizzi il controllore trovato mediante la corrispondenza poli-zeri.

Soluzione Parte A-II:

Quesito a

Si ricavi l'approssimante del dispositivo di hold necessaria per poter sviluppare il progetto

$$H(s)=\frac{1}{\frac{T}{2}s+1}=\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}=\frac{2}{s+2}=\frac{a}{s+a}$$

dove si è imposto $a=2$. Anche per l'impianto si proceda imponendo $b=0.1$ e $c=2$ per cui

$$G_p(s)=\frac{s+2}{s+0.1}=\frac{s+c}{s+b}.$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato sarà allora data da

$$1+k\frac{s+\alpha}{s+\beta}\frac{a}{s+a}\frac{s+c}{s(s+b)}=0.$$

Al fine di semplificare il progetto si imponga $\alpha=b$ in modo da ottenere una cancellazione esatta polo-zero di tipo stabile. Si noti inoltre che il polo del dispositivo di hold (posto in -*a*) cancella lo zero dell'impianto (posto in -*c*). L'equazione caratteristica diverrà

$$1+ka\frac{1}{s(s+\beta)}=0$$

e il corrispondente polinomio caratteristico varrà

$$s(s+\beta)+ka=0 \quad\Rightarrow\quad s^2+\beta s+ka=0.$$

I coefficienti β e k sono ancora da determinare mentre a e c sono noti. Il polinomio dovrà essere eguagliato al polinomio risultante dall'imposizione delle specifiche di progetto al fine di ottenere β e k. Si valuti la posizione dei poli dominanti del sistema retroazionato. Sapendo che $\delta=\sqrt{\frac{\ln^2(s/100)}{\ln^2(s/100)+\pi^2}}$ e che $S=10\%$ si ricava che il delta dei poli dominanti vale $\delta=0.5912$. Il valore di ω_n si ottiene imponendo il tempo di assestamento desiderato. Ricordando che il tempo di assestamento al 5% si deduce dalla relazione $T_a=\frac{3}{\delta\omega_n}$ e che si desidera avere $T_a=10$ s si può scrivere $\omega_n=\frac{3}{T_a\delta}=\frac{3}{10\delta}=0.5074$. Il polinomio caratteristico del sistema retroazionato sarà dunque

$$s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2=0.$$

Dal confronto dei due polinomi caratteristici risulta

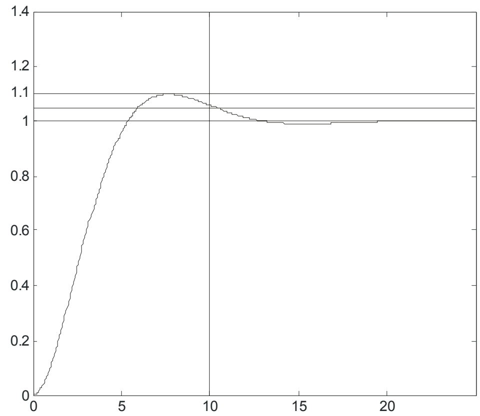
$$\beta=2\delta\omega_n$$
$$ak=\omega_n^2$$

Dall'ultima relazione si ricava immediatamente che $\beta=0.6$ e $k=\frac{\omega_n^2}{a}=0.1287$.

L'equazione complessiva del regolatore sarà dunque $G_c(s)=0.1287\frac{s+0.1}{s(s+0.6)}$

Considerazioni conclusive:

La rete introdotta cancella il polo del sistema posto in -0.1 e lo sposta in -0.6: si tratta quindi di una rete anticipatrice a cui è stato aggiunto un integratore. Il sistema chiuso in retroazione possiede due poli complessi coniugati ($\delta=0.5912$ e $\omega_n=0.5074$) e nessuno zero. Pertanto ci si può aspettare che la risposta al gradino del sistema retroazionato sia effettivamente molto simile alla risposta di un sistema del secondo ordine e che i vincoli di progetto siano sostanzialmente soddisfatti. Tracciando la risposta al gradino si ottiene infatti che la specifica sulla massima sovraelongazione è rispettata esattamente mentre quella sul tempo di assestamento al 5% non è rispettata di poco: $T_a = 10.34$ s. E' noto peraltro, che l'espressione usata per la valutazione del tempo di assestamento fornisce solo un'approssimazione del valore reale per cui il leggero non soddisfacimento della specifica era da attendersi.



Quesito b

Si ricordi che la corrispondenza poli-zeri richiede di ottenere il regolatore discreto attraverso la sostituzione $(s+a) \quad \Rightarrow \quad (z-e^{-aT})$ e di aggiungere tanti zeri in -1 quanto è l'eccesso tra poli e zeri nella funzione di trasferimento da trasformare. Ricordando che $G_c(s) = k\,\dfrac{s+\alpha}{s(s+\beta)}$ e che T=1, si ricava

$$G_c(z) = \tilde{k}\,\frac{(z-e^{-\alpha T})(z+1)}{(z-1)(z-e^{-\beta T})} = \tilde{k}\,\frac{(z-e^{-\alpha})(z+1)}{(z-1)(z-e^{-\beta})}.$$

Poiché il sistema è di tipo 1 il valore di $\tilde{k}$ si valuta imponendo che il controllore discreto e quello continuo abbiano la stessa costante di velocità

$$\lim_{s\to 0} s\,G_c(s) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} G_c(z)$$

Pertanto

$$\lim_{s\to 0} s\,G_c(s) = \lim_{s\to 0} s\,k\,\frac{s+\alpha}{s(s+\beta)} = \frac{k\alpha}{\beta} = 0.0215$$

ed essendo

$$\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} G_c(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T}\,\tilde{k}\,\frac{(z-e^{-\alpha})(z+1)}{(z-1)(z-e^{-\beta})} = \tilde{k}\,\frac{1-e^{-\alpha}}{1-e^{-\beta}} = 0.4218\,\tilde{k}$$

dal confronto delle due relazioni si ricava $\tilde{k} = 0.0509$.

Il regolatore discreto avrà equazione

$$G_c(z) = \tilde{k}\,\frac{(z-e^{-\alpha})(z+1)}{(z-1)(z-e^{-\beta})} = 0.0509\,\frac{(z-0.9048)(z+1)}{(z-1)(z-0.5488)}.$$

La risposta al gradino unitario del sistema retroazionato, ottenuta usando il controllore discreto, sarà