UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

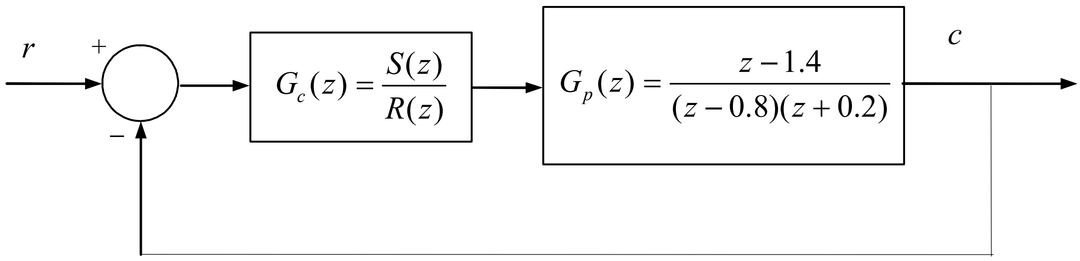
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

26/01/04

PARTE A-III

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di progettare il controllore $G_c(z)$ mediante l'uso della Diofantea in modo che il sistema retroazionato soddisfi le seguenti caratteristiche:

1) Errore in risposta alla rampa unitaria $e_v = 0.2$;
2) Massima sovraelongazione $S = 25\%$;
3) Tempo di salita dallo 0% al 100% $T_1 = 1\,\text{s}$.

Si ipotizzi un tempo di campionamento T pari a 0.2 secondi.

Soluzione:

Come primo passo si traducono le specifiche sulla risposta al gradino in posizione dei poli dominanti. Essendo stata richiesta una sovraelongazione massima del 25% in risposta al gradino si otterrà

$$\delta = \sqrt{\frac{\ln^2(S/100)}{\ln^2(S/100)+\pi^2}} = \sqrt{\frac{\ln^2(0.25)}{\ln^2(0.25)+\pi^2}} = 0.4037\,.$$

Il valore di ω_n si ottiene invece dalla specifica sul tempo di salita ricordando che $T_1 = \dfrac{\pi - \arccos(\delta)}{\omega_{\mathrm{n}}\sqrt{1\text{-}\delta^2}}$

e quindi

$$\omega_n = \frac{\pi - \arccos(\delta)}{T_1\sqrt{1\text{-}\delta^2}} = \frac{\pi - \arccos(0.4037)}{\sqrt{1\text{-}0.4037^2}} = 2.1712\,.$$

Si traducono i valori così ottenuti nella posizione desiderata dei poli dominanti del sistema discreto chiuso in retroazione utilizzando l'espressione ben nota

$$A_m = z^2 - 2e^{-\delta\omega_n T}\cos(\omega_n T\sqrt{1-\delta^2})z + e^{-2\delta\omega_n T} = z^2 - 1.5477z + 0.7043 = z^2 + a_1 z + a_0\,.$$

E' richiesto quindi di assegnare due poli nel dominio $\mathcal{Z}$ nelle posizioni

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = \frac{1.5477 \pm \sqrt{2.3953 - 2.8170}}{2} = 0.7739 \pm j0.3247$$

la cui distanza dall'origine risulta pari a $\sqrt{0.7739^2 + 0.3247^2} = 0.8393$.

Osservando l'impianto è possibile stabilire che

$$A^+(z) = (z-0.8)(z+0.2); \quad A^-(z) = 1; \quad B^+(z) = 1; \quad B^-(z) = z - 1.4 = z + b_0\,.$$

Inoltre, poiché è stata fissata una specifica sull'errore alla rampa, è necessario che l'errore al gradino sia nullo. Ciò richiede di imporre nel guadagno di anello la presenza di un integratore. Poiché l'impianto non ne prevede si dovrà aggiungere un integratore nel controllore: si imporrà quindi che $q = 1$.

Si calcolano i gradi dell'equazione Diofantea.

gr(S') = 0 + 1 – 1 = 0

gr(R'') = 2 – 0 – 1 = 1

gr(A_{m}) = 0 + 2 – 0 – 1 + 1 = 2.

In teoria sarebbe necessario risolvere una equazione Diofantea del tipo

$$A^- R''(z-1) + B^- S' = A_m \quad \Rightarrow \quad \left(r_0 + r_1 z\right)(z-1) + (z+b_0)s_0 = z^2 + a_1 z + a_0\,,$$

tuttavia la richiesta sull'errore a regime impone di elevare il grado del polinomio S' in modo da avere un grado di libertà in più in fase di progetto. E' necessario risolvere quindi la seguente equazione Diofantea

$$\left(r_0 + r_1 z + r_2 z^2\right)(z-1) + (z+b_0)(s_0 + s_1 z) = (z^2 + a_1 z + a_0)(z + a_2)$$

$$r_2 z^3 + r_1 z^2 + r_0 z - r_2 z^2 - r_1 z - r_0 + s_1 z^2 + (s_0 + b_0 s_1)z + b_0 s_0 = z^3 + a_1 z^2 + a_0 z + a_2 z^2 + a_2 a_1 z + a_2 a_0$$

$$r_2 z^3 + (r_1 - r_2 + s_1)z^2 + (r_0 - r_1 + s_0 + b_0 s_1)z + b_0 s_0 - r_0 = z^3 + (a_1 + a_2)z^2 + (a_0 + a_2 a_1)z + a_2 a_0$$

da cui si ricava il sistema di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} r_2 = 1 \\ r_1 - r_2 + s_1 = a_1 + a_2 \\ r_0 - r_1 + s_0 + b_0 s_1 = a_0 + a_2 a_1 \\ b_0 s_0 - r_0 = a_2 a_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 - 1 + s_1 = a_1 + a_2 \\ r_0 - r_1 + s_0 + b_0 s_1 = a_0 + a_2 a_1 \\ b_0 s_0 - r_0 = a_2 a_0 \end{cases}.$$

Si noti che si è stati costretti ad aggiungere un polo nel polinomio A_m. Per fare in modo che il nuovo polo non sia dominante lo si pone più vicino all'origine rispetto quelli assegnati dalle specifiche di progetto: $a_2 = -0.7$.

Si ricava una quarta equazione dal soddisfacimento della specifica sull'errore a regime in risposta ad una rampa

$$e_v = \frac{R_0}{K_v} = \frac{1}{K_v} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \quad K_v = \frac{10}{2} = 5 .$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} G_c G_p = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} \frac{A^+ S'}{B^+ R''(z-1)^q} \frac{B^+ B^-}{A^+ A^-} = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{T} \frac{S'}{R''(z-1)} \frac{B^-}{A^-} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{10}{2} \frac{s_0 + s_1 z}{r_0 + r_1 z + r_2 z^2} (z + b_0) = 5 \frac{s_0 + s_1}{r_0 + r_1 + r_2} (1 + b_0) \end{aligned}$$

si ottiene la quarta equazione necessaria per risolvere il sistema

$$5 \frac{s_0 + s_1}{r_0 + r_1 + r_2} (1 + b_0) = 5 \quad \Rightarrow \quad (s_0 + s_1)(1 + b_0) = r_0 + r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad (1 + b_0)s_0 + (1 + b_0)s_1 = r_0 + r_1 + r_2 .$$

Sommando le prime tre equazioni del sistema si ottiene

$$\begin{cases} r_1 - 1 + s_1 = a_1 + a_2 \\ r_0 - r_1 + s_0 + b_0 s_1 = a_0 + a_2 a_1 \\ b_0 s_0 - r_0 = a_2 a_0 \end{cases} \Rightarrow \quad r_1 - 1 + s_1 + r_0 - r_1 + s_0 + b_0 s_1 + b_0 s_0 - r_0 = a_1 + a_2 + a_0 + a_2 a_1 + a_2 a_0$$

$$\Downarrow$$

$$(1 + b_0)s_0 + (1 + b_0)s_1 = a_1 + a_2 + a_0 + a_2 a_1 + a_2 a_0 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$-0.4 s_0 - 0.4 s_1 = 0.0470$$

Dalla prima e la terza equazione si ottiene

$$r_1 = a_1 + a_2 + 1 - s_1$$

$$r_0 = b_0 s_0 - a_2 a_0$$

che sostituite nella quarta consentono di scrivere

$$(1 + b_0)s_0 + (1 + b_0)s_1 = r_0 + r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad (1 + b_0)s_0 + (1 + b_0)s_1 = b_0 s_0 - a_2 a_0 + 1 + a_1 + a_2 + 1 - s_1$$

$$\Downarrow$$

$$s_0 + (2 + b_0)s_1 = -a_2 a_0 + a_1 + a_2 + 2$$

$$\Downarrow$$

$$s_0 + 0.6 s_1 = 0.2453$$

La soluzione finale si ottiene dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 0.4 s_0 + 0.4 s_1 = -0.0470 \\ s_0 + 0.6 s_1 = 0.2453 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4 s_0 + 0.4 s_1 = -0.0470 \\ s_0 = 0.2453 - 0.6 s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4(0.2453 - 0.6 s_1) + 0.4 s_1 = -0.0470 \\ s_0 = 0.2453 - 0.6 s_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -0.24 s_1 + 0.4 s_1 = -0.0981 - 0.0470 \\ s_0 = 0.2453 - 0.6 s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.16 s_1 = -0.1451 \\ s_0 = 0.2453 - 0.6 s_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = -0.9069 \\ s_0 = 0.7894 \end{cases}$$

Per finire

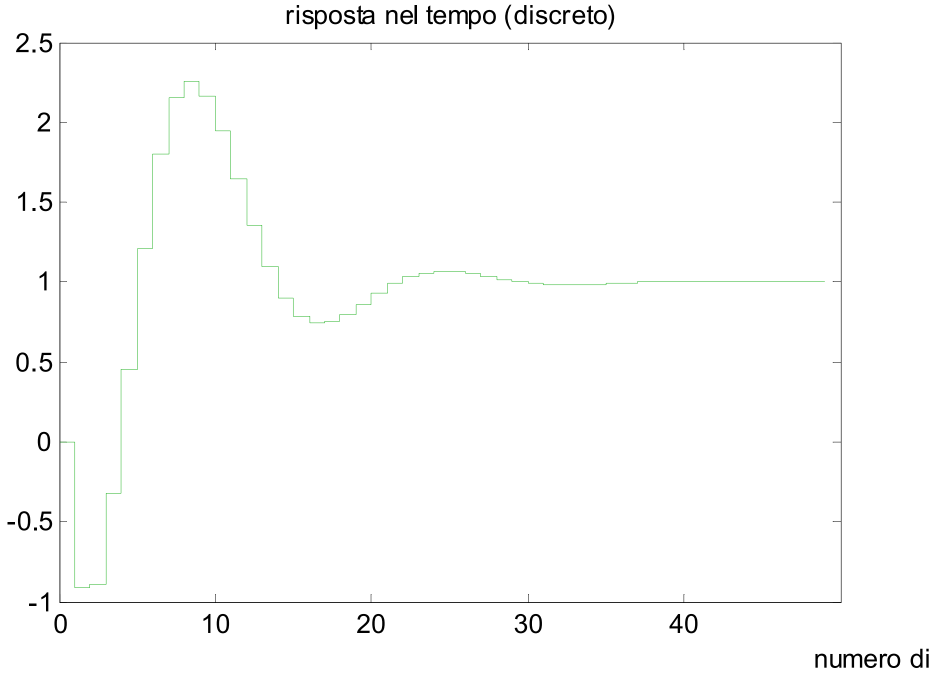
$$r_1 = a_1 + a_2 + 1 - s_1 = -0.3408$$

$$r_0 = b_0 s_0 - a_2 a_0 = -0.6122$$

Il controllore avrà equazione

$$G_c(z) = \frac{A^+ S'}{B^+ R''(z-1)^q} = \frac{(z-0.8)(z+0.2)(0.7894-0.9069z)}{(z^2-0.3408z-0.6122)(z-1)} = -0.9069\frac{(z-0.8)(z+0.2)(z-0.8704)}{(z+0.6304)(z-0.9712)(z-1)}$$

Le verifiche condotte sul sistema chiuso in retroazione hanno consentito di appurare che la posizione dei poli del sistema retroazionato è quella effettivamente desiderata. Nonostante ciò la risposta al gradino del sistema è quella riportata in figura: la sovraelongazione è del 125%!



La discrepanza tra il valore atteso di sovraelongazione e quello reale è dovuta allo zero a fase non minima presente nell'impianto (z = 1.4) che fa sì che la risposta del sistema retroazionato si discosti di molto da quella di un sistema del secondo ordine puro (privo di zeri). Si noti, inoltre, come la presenza dello zero a fase non minima provoca una partenza verso il basso della risposta al gradino analogamente a quanto accade nei sistemi continui.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

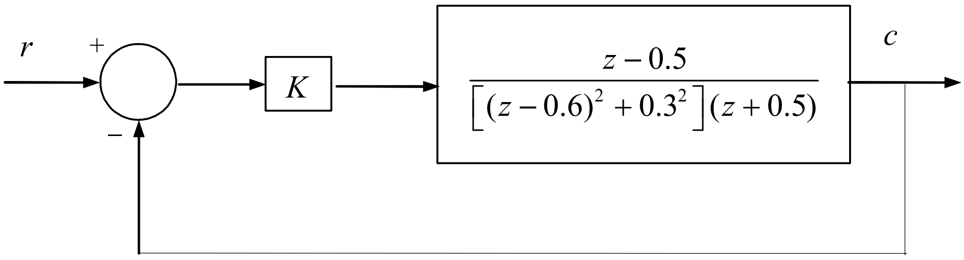
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Prova scritta di "Controlli Digitali"

26/01/04

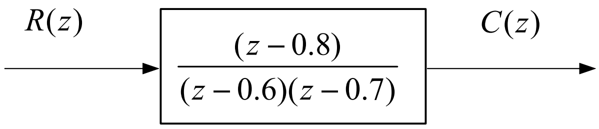
PARTE A-I

a) Sia dato il seguente sistema in retroazione unitaria



Si chiede di valutarne la stabilità asintotica mediante l'uso della bilineare e del criterio di Routh-Hurwitz al variare del parametro $K \in [-\infty, \infty]$.

b) Sia dato il seguente sistema



Si valuti l'evoluzione totale dell'uscita $c(k)$ del sistema (risposta libera + risposta forzata) utilizzando la tecnica dell'integrale di inversione, sapendo che il segnale di ingresso è costituito da un gradino unitario e che le condizioni iniziali per l'uscita sono:

$c(0)=1$; $c(1)=2$.

Soluzione quesito a:

Si ricava, come primo passo, il polinomio caratteristico a partire dall'equazione caratteristica

$$1+K\frac{z-0.5}{\left[(z-0.6)^2+0.3^2\right](z+0.5)}=0$$

$$\left[z^2-1.2z+0.45\right](z+0.5)+K(z-0.5)=0$$

$$z^3-0.7z^2-0.15z+0.225+K(z-0.5)=0$$

$$z^3-0.7z^2+(K-0.15)z+0.225-0.5K=0$$

Si trasforma il polinomio utilizzando la nota relazione $z=\dfrac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3-0.7\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2+(K-0.15)\frac{1+w}{1-w}+0.225-0.5K=0$$

$$\left(1+w\right)^3-0.7\left(1+w\right)^2\left(1-w\right)+(K-0.15)\left(1+w\right)\left(1-w\right)^2+\left(0.225-0.5K\right)\left(1-w\right)^3=0$$

$$\left(1+3w+3w^2+w^3\right)-0.7\left(1+2w+w^2\right)\left(1-w\right)+(K-0.15)\left(1+w\right)\left(1-2w+w^2\right)$$
$$+\left(0.225-0.5K\right)\left(1-3w+3w^2-w^3\right)=0$$

$$\left(1+3w+3w^2+w^3\right)-0.7\left(1+w-w^2-w^3\right)+(K-0.15)\left(1-w-w^2+w^3\right)$$
$$+\left(0.225-0.5K\right)\left(1-3w+3w^2-w^3\right)=0$$

$$w^3(1+0.7+K-0.15-0.225+0.5K)+w^2(3+0.7-K+0.15+0.675-1.5K)$$
$$+w(3-0.7-K+0.15-0.675+1.5K)+(1-0.7+K-0.15+0.225-0.5K)=0$$

$$w^3(1.325+1.5K)+w^2(4.525-2.5K)+w(1.775+0.5K)+(0.375+0.5K)=0$$

Non resta che verificare i valori di *K* per i quali si ha la stabilità asintotica del sistema utilizzando il criterio di Routh-Hurwitz. Poiché il termine *K* compare in tutti i coefficienti è necessario verificare sia il caso in cui questi sono tutti positivi che quello in cui sono tutti negativi. Partiamo dalla prima verifica

$$\begin{cases}1.325+1.5K>0\\4.525-2.5K>0\\1.775+0.5K>0\\0.375+0.5K>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}K>-\dfrac{1.325}{1.5}=-0.8833\\K<\dfrac{4.525}{2.5}=1.81\\K>-\dfrac{1.775}{0.5}=-3.55\\K>-\dfrac{0.375}{0.5}=-0.75\end{cases}\tag{1}$$

Le condizioni date restringono l'intervallo di stabilità tra gli estremi $-0.75<K<1.81$. Rimane da costruire la tabella di Routh per verificare se l'intervallo si restringerà ulteriormente.

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1.325+1.5K & 1.775+0.5K \\
2 & 4.525-2.5K & 0.375+0.5K \\
1 & \alpha & 0 \\
0 & 0.375+0.5K & 0
\end{array}
$$

Il soddisfacimento delle condizioni (1) fa sì che i primi coefficienti delle righe 3, 2 e 0 siano positivi con certezza e quindi per essi non sono necessari altri test. Resta la necessità di verificare la positività di α .

$$
\alpha = \frac{(4.525-2.5K)(1.775+0.5K)-(1.325+1.5K)(0.375+0.5K)}{4.525-2.5K} > 0 .
$$

Poiché il termine $4.525-2.5K$ è positivo basterà verificare che

$$
(4.525-2.5K)(1.775+0.5K)-(1.325+1.5K)(0.375+0.5K) > 0
$$

$$
-2K^2 - 3.4K + 7.535 > 0
$$

Risolvendo in K si ottiene infine

$$
K_{1,2} = \frac{3.4 \pm \sqrt{3.4^2 + 4 \cdot 2 \cdot 7.535}}{-2 \cdot 2} = \begin{cases} K_1 = \text{-}2.9690 \\ K_2 = 1.2690 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{-}\,2.9690 < K < \; 1.2690
$$

Confrontando questo risultato con gli intervalli di stabilità verificati in precedenza si ottiene infine che il sistema è asintoticamente stabile nell'intervallo

$$
-0.75 < K < 1.2690 .
$$

Resta da considerare il caso in cui tutti i coefficienti sono negativi

$$
\begin{cases} 1.325+1.5K < 0 \\ 4.525-2.5K < 0 \\ 1.775+0.5K < 0 \\ 0.375+0.5K < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K < -\dfrac{1.325}{1.5} = -0.8833 \\ K > \dfrac{4.525}{2.5} = 1.81 \\ K < -\dfrac{1.775}{0.5} = -3.55 \\ K < -\dfrac{0.375}{0.5} = -0.75 \end{cases} .
$$

Si vede immediatamente che le quattro condizioni non possono essere verificate simultaneamente per cui non vi sono altri intervalli di stabilità oltre a quello già rilevato.

Soluzione quesito b:

Si ricava come primo passo l'equazione alle differenze del sistema

$$
C(z) = \frac{z-0.8}{(z-0.6)(z-0.7)} R(z)
$$

$$
C(z)\left[z^2 - 1.3z + 0.42\right] = (z-0.8)R(z)
$$

$$
\Downarrow \quad \text{antitrasformando}
$$

$$
c(k+2) - 1.3\,c(k+1) + 0.42\,c(k) = r(k+1) - 0.8r(k)
$$

Si ritrasformi il sistema tenendo conto anche della presenza delle condizioni iniziali

$$z^2C(z) - z^2c(0) - z\,c(1) - 1.3\,z\,C(z) + 1.3\,z\,c(0) + 0.42\,C(z) = z\,R(z) - z\,r(0) - 0.8R(z)$$

Il valore di $r(0)$ lo otteniamo sapendo che in ingresso sarà presente un gradino unitario: $r(0) = 1$.
Fatte le debite sostituzioni ed evidenziando i termini dipendenti da $C(z)$ si ottiene

$$z^2C(z) - z^2 - 2z - 1.3\,z\,C(z) + 1.3\,z + 0.42\,C(z) = z\,R(z) - z - 0.8R(z)$$

$$C(z)\left(z^2 - 1.3\,z + 0.42\right) = (z - 0.8)R(z) + z(z - 0.3)$$

$$C(z) = \frac{(z-0.8)}{(z-0.6)(z-0.7)}R(z) + \frac{z(z-0.3)}{(z-0.6)(z-0.7)}$$

Tenendo conto che la trasformata del gradino unitario è data da $R(z) = \frac{z}{z-1}$ si ricava

$$C(z) = \frac{(z-0.8)}{(z-0.6)(z-0.7)}\frac{z}{z-1} + \frac{z(z-0.3)}{(z-0.6)(z-0.7)}$$

$$C(z) = \frac{(z-0.8)z + z(z-0.3)(z-1)}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}$$

$$C(z) = \frac{z^3 - 0.3z^2 - 0.5z}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}$$

Per utilizzare la tecnica dell'integrale di inversione calcoliamo il prodotto

$$C(z)\,z^{k-1} = \frac{z^3 - 0.3z^2 - 0.5z}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}z^{k-1} = \frac{(z^2 - 0.3z - 0.5)z^k}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}.$$

E' evidente che per $K \geq 0$ il numero di poli di questa funzione non varia e pertanto il calcolo dei residui si riduce ad un solo caso

$$c_1(k) = (z-1)\left.\frac{(z^2 - 0.3z - 0.5)z^k}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}\right|_{z=1} = \frac{1 - 0.3 - 0.5}{0.4 \cdot 0.3} = 1.6666$$

$$c_2(k) = (z-0.6)\left.\frac{(z^2 - 0.3z - 0.5)z^k}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}\right|_{z=0.6} = \frac{0.6^2 - 0.3 \cdot 0.6 - 0.5}{-0.1 \cdot (-0.4)}0.6^k = -8 \cdot 0.6^k$$

$$c_3(k) = (z-0.7)\left.\frac{(z^2 - 0.3z - 0.5)z^k}{(z-0.6)(z-0.7)(z-1)}\right|_{z=0.7} = \frac{0.7^2 - 0.3 \cdot 0.7 - 0.5}{0.1 \cdot (-0.3)}0.7^k = 7.3333 \cdot 0.7^k$$

In conclusione la risposta complessiva del sistema sarà data da

$$c(k) = c_1(k) + c_2(k) + c_3(k) = 1.6666 - 8 \cdot 0.6^k + 7.3333 \cdot 0.7^k.$$