Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 5 Maggio 2006

1- Illustra il metodo della formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta e dimostra il risultato presentato. Spiega in che modo il teorema dei residui può essere usato per risolvere in modo agevole la formula di inversione.

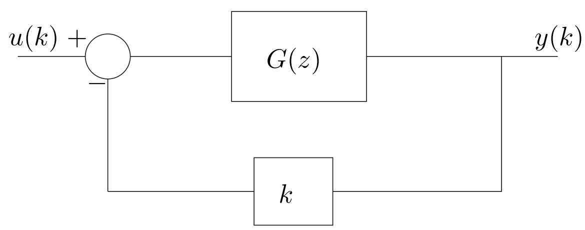
2- Descrivi il filtro di Hold per la ricostruzione dei segnali campionati, indicandone la risposta all'impulso e la risposta in frequenza. Illustra i problemi legati all'utilizzo del filtro di Hold nei sistemi di controllo digitali.

3- Determina la *funzione di trasferimento* e la *risposta all'impulso* di un sistema discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) = -0.5y(k-1) + 2u(k-1)$$

determina inoltre il segnale di uscita $y(k)$ quando l'ingresso è dato da $u(k) = 1(k)$ e disegnane il grafico.

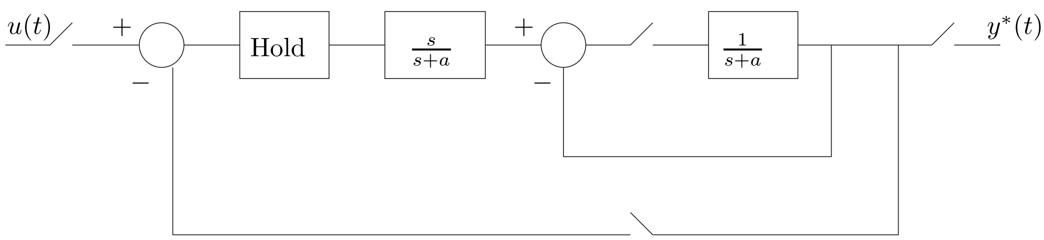
4- Determina l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema discreto è asintoticamente stabile



con

$$G(z) = \frac{z+0.5}{z(z-1)(z+1)} .$$

5- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(t)$ e l'uscita $y^*(t)$.



Soluzione:
Domanda 3
Facendo la trasformata zeta otteniamo

$$Y(z) = -0.5Y(z)z^{-1} + 2U(z)z^{-1}$$

da cui

$$Y(z) = \frac{2}{z+0.5}U(z) \ ,$$

la risposta all'impulso è l'antitrasformata zeta della funzione di trasferimento è data quindi da

$$h(k) = 2(0.5)^{k-1}1(k-1)$$

ponendo in ingresso il gradino unitario, in uscita abbiamo

$$Y(z) = \frac{2z}{(z+0.5)(z-1)} \ ,$$

facendo l'antitrasformata zeta, ad esempio con l'integrale di inversione, otteniamo

$$y(k) = \frac{4}{3}(1-(-0.5)^k) \ .$$

Domanda 4
La funzione di trasferimento è

$$T(z) = \frac{z+0.5}{z(z-1)(z+1)+k(z+0.5)},$$

l'equazione caratteristica è data quindi da

$$q(z) = z(z-1)(z+1) + k(z+0.5) = z^3 + z(k-1) + k0.5 \ ,$$

le condizioni necessarie sono

$$1)\ 1 > |k0.5| \leftarrow k \in (-2, 2) \ ,$$

$$2)\ q(1) > 0 \leftarrow k > 0 \ ,$$

$$3)\ q(-1) < 0 \leftarrow k > 0 \ ,$$

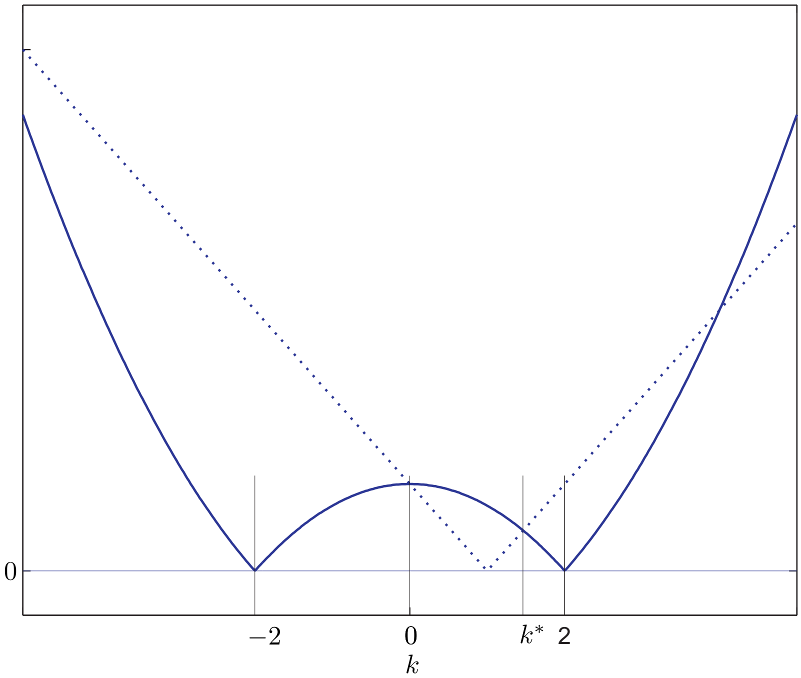
dalle prime tre condizioni otteniamo $k \in (0, 2)$, costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$0.5k$	$k-1$	0	1
2	1	0	$k-1$	$0.5k$
3	$0.25k^2-1$	$0.5k^2-0.5k$	$1-k$	

la quarta condizione è dunque

$$|0.25k^2 - 1| > |1-k|$$

disegnamo il grafico delle due funzioni $|0.25k^2 - 1|$ e $|1-k|$



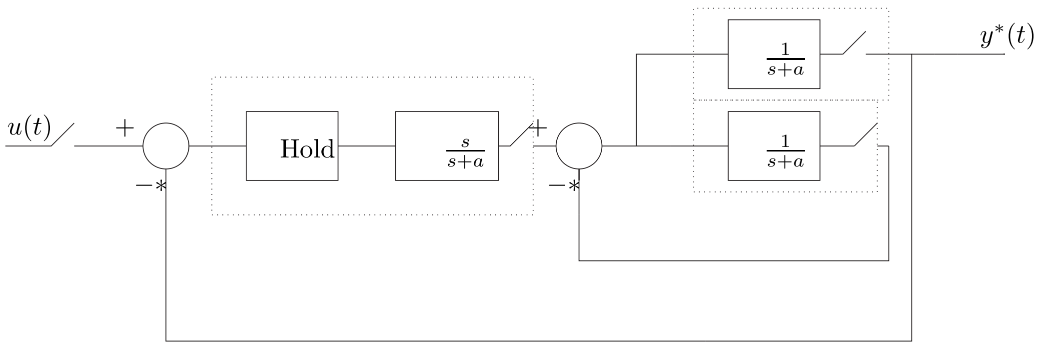
l'unica regione in cui la disequazione è verificata, all'interno dell'intervallo $(0, 1)$ è data da $(0, k^*)$ calcoliamo k^* come intersezione tra le funzioni $0.25k^2 - 1$ e $k - 1$, ottenendo

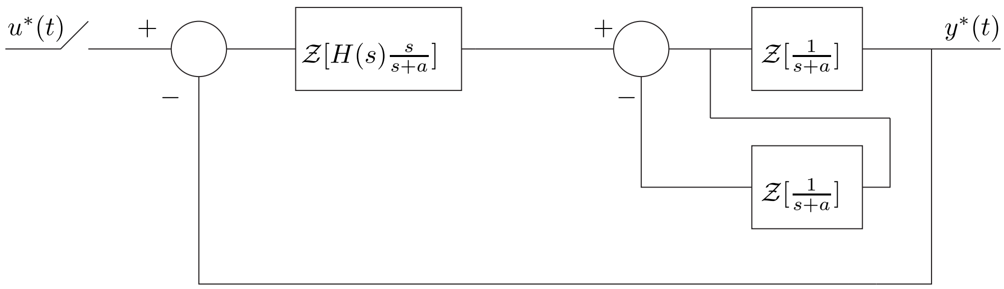
$$k^* = 2(\sqrt{3} - 1) = 1.464 ,$$

quindi il sistema è asintoticamente stabile per $k \in (0, 1.464)$.

Domanda 5

Possiamo trasformare lo schema in questo modo





abbiamo che

$$A(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{s}{s+a}] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s+a}] = (1-z^{-1})(\frac{z}{z-e^{-aT}}) = \frac{z-1}{z-e^{-aT}}$$

$$B(z) = \mathcal{Z}[\frac{1}{(s+a)}] = \frac{z}{z-e^{aT}}$$

la funzione di trasferimento complessiva è data quindi da

$$T(z) = \frac{A(z)\frac{B(z)}{1+B(z)}}{1+A(z)\frac{B(z)}{1+B(z)}} = \frac{A(z)B(z)}{1+B(z)+A(z)B(z)} =$$
$$= \frac{(z-1)z}{(z-e^{-aT})^2 + z(z-e^{-aT}) + (z-1)z}$$