Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 6 Maggio 2005

Parte A-I

Determina la trasformata di Laplace di un segnale continuo, campionato con un periodo di campionamento T, sviluppando tutti i passaggi.

Spiega inoltre cos'è il filtro ricostruttore ideale e per quali ragioni non è fisicamente realizzabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 6 Maggio 2005

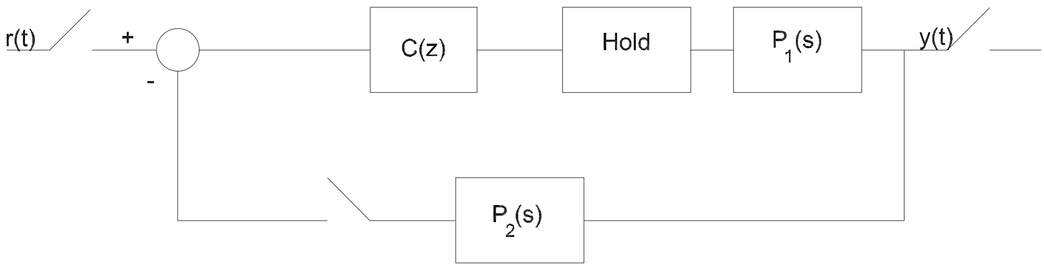
Parte A-II

Enuncia e dimostra il teorema di Nyquist per la stabilità asintotica dei sistemi discreti.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 6 Maggio 2005

Parte B-I

Considera il seguente sistema



in cui

$$P_1(z) = \frac{1}{s+1},\ P_2(z) = \frac{s+1}{s+5},\ C(z) = \frac{K}{z+0.2},$$

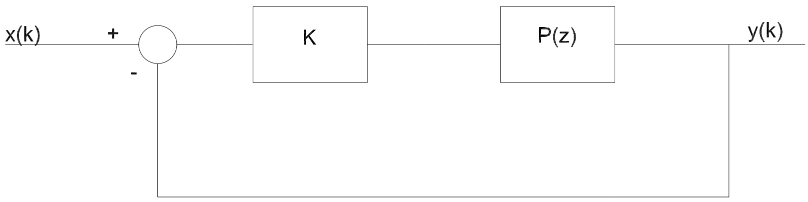
il tempo di campionamento è pari a $T = 0.1s$.

- Usando le regole di trasformazione dei diagrammi a blocchi, converti il sistema dato in uno in cui compaiono solo segnali discreti.
- Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $r^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$ (non è necessario sostituire il valore numerico di T).
- Calcola l'equazione caratteristica, sostituendo il valore numerico di T.
- Usando il criterio di Jury, calcola l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Scritta di Controlli Digitali del 6 Maggio 2005

Parte B-II

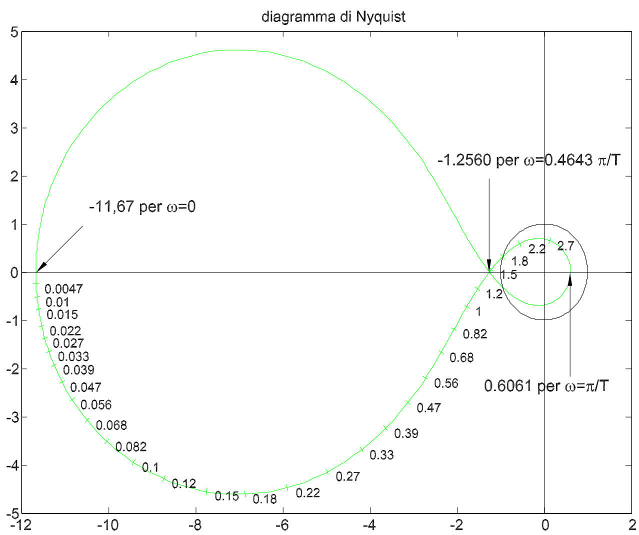
a) Considera il sistema



dove

$$P(z) = \frac{z(z+1.8)}{(z-0.2)(z+0.5)(z-1.2)} \ ,$$

e il tempo di campionamento T è pari ad $1s$, il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento $P(z)$ è il seguente



usando il criterio di Nyquist, determina l'insieme di valori per $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

b) Risolvi la seguente equazione alle differenze, facendo uso della trasformata zeta

$$\begin{aligned} &x(k+2) = 4x(k+1) - 4x(k) \\ &x(0) = 1 \\ &x(1) = 0 \ . \end{aligned}$$

Soluzione:
Parte A-I

$$(HP_1)(z) = \mathcal{Z}[H(s)P_1(s)] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+1)}] = (1-z^{-1})(\mathcal{Z}[\frac{1}{s}] - \mathcal{Z}[\frac{1}{s+1}]) =$$
$$= (1-z^{-1})(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \ ,$$

analogamente

$$(HP_1P_2)(z) = \mathcal{Z}[H(s)P_1(s)P_2(s)] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+5)}] = (1-z^{-1})(\mathcal{Z}[\frac{1}{5}\frac{1}{s}] - \frac{1}{5}\mathcal{Z}[\frac{1}{s+5}]) =$$
$$= (1-z^{-1})\frac{1}{5}(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-5T}}) = \frac{1-e^{-5T}}{5(z-e^{-5T})} \ ,$$

la funzione di trasferimento risulta

$$T(z) = \frac{G(z)(HP_1)(z)}{1+G(z)(HP_1P_2)(z)} = \frac{\frac{K}{z+0.2}\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}}{1+\frac{k}{5(z+0.2)}\frac{1-e^{-5T}}{z-e^{-5T}}} = \frac{5k(z-e^{-5T})(1-e^{-T})}{5(z-e^{-T})(5(z+0.2)(z-e^{-5T})+k(1-e^{-5T}))} \ .$$

L'equazione caratteristica è data da

$$(z+0.2)(z-e^{-5T}) + k\frac{(1-e^{-5T})}{5} = 0,$$

sostituendo $T = 0.1s$, otteniamo

$$q(z) = z^2 - 0.4065z - 0.1213 + 0.07869k = 0 \ ,$$

poniamo $a_0 = 1$, $a_1 = -0.4065$, $a_2 = 0.07869 - 0.1213$.

applichiamo il criterio di Jury, essendo il sistema del secondo ordine, basta verificare le condizioni di partenza

$$a_0 > |a_2| \rightarrow 1 > |0.07869k - 0.1213| \leftarrow k \in (-11.1666, 14.2469),$$
$$q(1) > 0 \leftarrow k > -6 \ ,$$
$$q(-1) > 0 \leftarrow k > -16.3324 \ .$$

quindi, complessivamente, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$k \in (-6, 14.2469) \ .$$

Parte A-II a- La funzione di guadagno di anello presenta un polo fuori dal cerchio unitario, quindi il sistema è stabile per tutti i valori di k per cui il punto critico $-\frac{1}{k}$ viene circondato una volta in senso antiorario dal diagramma di Nyquist. Questo accade se è verificata la condizione

$$-11.67 < -\frac{1}{k} < -1.2650 \ ,$$

da cui si ha stabilità asintotica se e solo se

$$k \in (0.0857, 0.7905) \ .$$

b- Trasformando l'equazione otteniamo

$$z^2X(z) - zx(1) - z^2x(0) = 4(X(z) - z(x(0)) - 4X(z) ,$$

da cui, sostituendo le condizioni iniziali

$$z^2X(z) - z^2 = 4(X(z) - z) - 4X(z) ,$$

e

$$X(z) = \frac{z^2 - 4z}{z^2 - 4z + 4} = \frac{z(z-4)}{(z-2)^2} ,$$

per antitrasformare usiamo l'integrale di inversione

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_\gamma X(z)z^{k-1}dz = \sum \text{Res}(\frac{(z-4)z^k}{(z-2)^2},),$$

la funzione ha un solo polo, di ordine 2, in $z = 2$, da cui

$$x(k) = \frac{dX(z)z^{k-1}(z-2)^2}{dz}|_{z=2} = z^k + k(z-4)z^{k-1}|_{z=2} = 2^k(1-k).$$