Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 14 Maggio 2007

1 (5 punti)- Dimostra che se $x(k) = 0$, $y(k) = 0$, $\forall k < 0$ allora

$$\mathcal{Z}[x(k)]\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[x(k) \star y(k)] \ .$$

2 (4 punti)- Definisci quando un sistema a tempo discreto si dice tempo invariante. Fornisci un esempio di sistema a tempo discreto che NON sia tempo invariante.

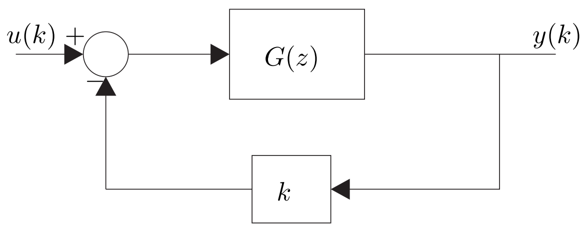
3 (4 punti)- Determina l'antitrasformata zeta della seguente funzione

$$X(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z-2)} \ ,$$

4 (5 punti)- Risolvi la seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} x(k+2) = 0.6x(k+1) - 0.25x(k) \\ x(0) = 0, \ x(1) = 1 \ . \end{cases}$$

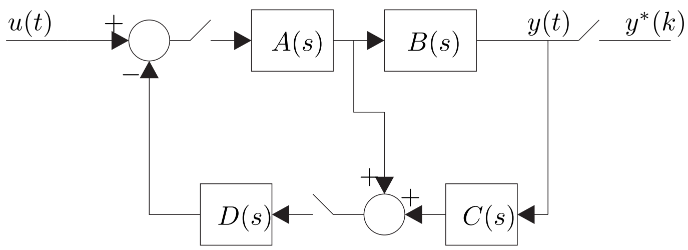
5 (5 punti)- Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile



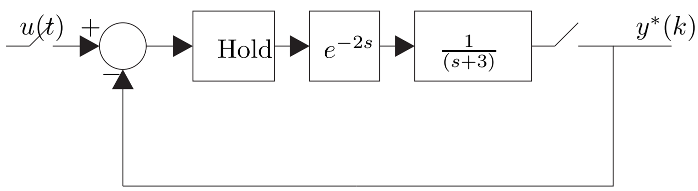
con

$$G(z) = \frac{1}{z^3 - z^2} \ .$$

6 (5 punti)- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.



7 (5 punti)- Calcola la funzione di trasferimento del seguente sistema, assumendo il tempo di campionamento pari ad 1 secondo.



Soluzione:
Domanda 3

$$x(k) = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^{k-1}}{(z-0.5)(z-2)}) \ ,$$

per $k = 0$ abbiamo tre poli in 0.5, 2 e 0, il grado relativo è pari a 3 e quindi $x(0) = 0$, per $k > 0$ risulta

$$x(k) = -2/30.5^{k-1} + 2/32^{k-1} \ ,$$

quindi, complessivamente

$$x(k) = 2/3(2^{k-1} - 0.5^{k-1})1(k-1) \ .$$

Domanda 4
Facendo la trasformata zeta si ottiene

$$z^2X(z) - z = 0.6zX(z) - 0.25X(z) \ ,$$

da cui

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.6z + 0.25} = \frac{z}{(z-(0.3+0.4j))(z-(0.3-0.4j))} \ ,$$

con l'integrale di inversione

$$x(k) = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^k}{(z-(0.3+0.4j))(z-(0.3-0.4j))}) =$$

$$= 2\mathrm{Re}\{\mathrm{Res}(\frac{z^k}{(z-(0.3+0.4j))(z-(0.3-0.4j))}, 0.3+0.4j)\} =$$

$$= 2\mathrm{Re}\{\frac{0.5^k}{0.8}e^{j\arctan(0.4/0.3)k-\frac{\pi}{2}}\} = 2.5 \cdot 0.5^k \sin(\arctan(0.4/0.3)k) \ .$$

Domanda 5
La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+kG(z)} \ ,$$

l'equazione caratteristica è

$$q(z) = z^3 - z^2 + k \ ,$$

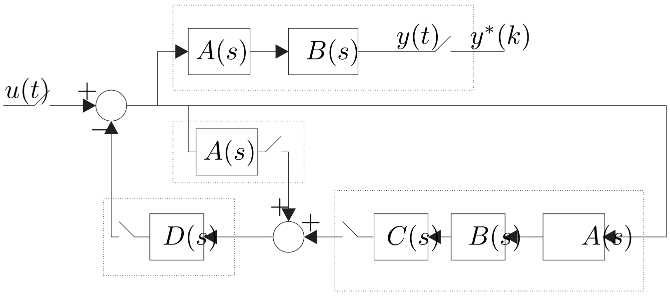
le condizioni necessarie sono
1) $1 > |k| \rightarrow k \in (-1, 1)$
2) $q(1) > 0 \rightarrow k > 0$
3) $q(-1) < 0 \rightarrow k < 2$
la tabella di Jury è la seguente

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	k	0	-1	1
2	1	-1	0	k
3	k^2-1	1	$-k$	

l'ultima condizione è $|k^2-1| > |-k|$ che è verificata per $|k| > 1/2(1+\sqrt{5})$ e $|k| < 1/2(-1+sqrt5)$, facendo l'intersezione degli intervalli trovati otteniamo

$$k \in (0, 1/2(-1+\sqrt{5})) = (0, 0.6180) \ .$$

Domanda 6
Lo schema si può trasformare nel seguente modo



facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{(AB)(z)}{1 + D(z)A(z) + D(z)(ABC)(z)} \ .$$

Domanda 7

$$\mathcal{Z}[H(s)e^{-2s}\frac{1}{s+3}] = z^{-2}\frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+3)}] \ ,$$

inoltre

$$\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+3)}] = \frac{1}{3}\frac{z(1-e^{-3T})}{(z-1)(z-e^{-3T})} \ ,$$

per cui, sostituendo il tempo di campionamento $T = 1\ s$, otteniamo

$$\mathcal{Z}[H(s)e^{-2s}\frac{1}{s+3}] = \frac{1-e^{-3}}{3z^2(z-e^{-3})} \ ,$$

la funzione di trasferimento è dunque

$$T(z) = \frac{1-e^{-3}}{3z^2(z-e^{-3}) + (1-e^{-3})} \ .$$