Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 5 Maggio 2009

1 (5 punti)- Presenta e dimostra la formula per determinare la trasformata zeta del segnale ritardato $x(k-n)$, prima nel caso generale e poi assumendo $x(k) = 0$, $\forall k < 0$.

2 (4 punti)- Definisci l'equivalente a tempo discreto di un sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento $P(s)$, con ingresso campionato ed uscita immediatamente campionata. Quale regola di trasformazione si può formulare a partire da tale equivalenza?

3 (4 punti)- Determina la risposta all'impulso del sistema che ha la seguente funzione di trasferimento

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-1)} .$$

4 (5 punti)- I polli di un allevatore aumentano di per sé del 3 percento ogni mese, l'allevatore ne preleva però 10 ogni mese per venderli. Il numero di polli al mese k-esimo $y(k)$ segue dunque la seguente legge

$$\begin{cases} y(k+1) = 1.03y(k) - 10 \\ y(0) = C , \end{cases}$$

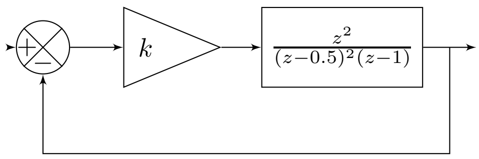
dove C è il numero iniziale di polli.

a) Calcola la trasformata zeta $Y(z)$.

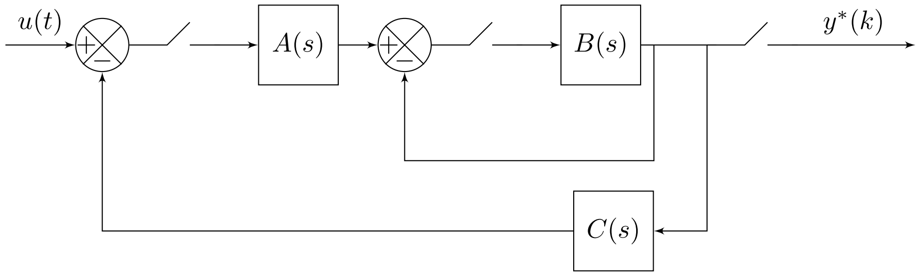
b) Determina la funzione $y(k)$. Cosa può succedere nel tempo al numero di polli a seconda del valore del dato iniziale C? (si esauriscono? aumentano all'infinito? rimangono costanti?)

c) Determina il numero minimo di polli C che consente all'allevatore di non esaurire nel tempo l'allevamento.

5 (5 punti)- Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile.



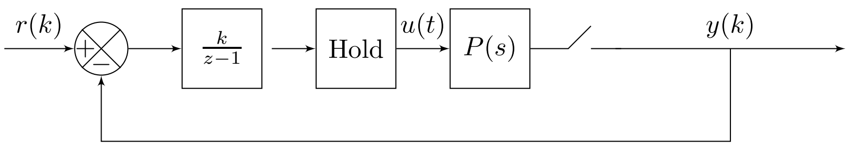
6 (5 punti)- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente a tempo discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi a tempo discreto. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.



7 (5 punti)- Nello schema seguente $P(s)$ rappresenta una caldaia posta in un'abitazione, l'ingresso $u(t)$ è la massa di combustibile immessa nell'unità di tempo mentre l'uscita $y(t)$ rappresenta la temperatura della casa. Si suppone che il sistema sia descritto dalla seguente equazione differenziale

$$Dy(t) = -\alpha y(t) + u(t) ,$$

in cui $\alpha > 0$ è un coefficiente di scambio termico. Il segnale $r(k)$ rappresenta il set point di temperatura. Lasciare indicato il tempo di campionamento genericamente con T.



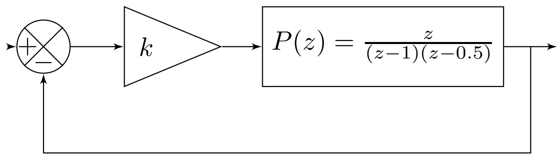
a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.

b) Determina l'insieme dei valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali per fuoricorso del 5 Maggio 2009 - Parte B

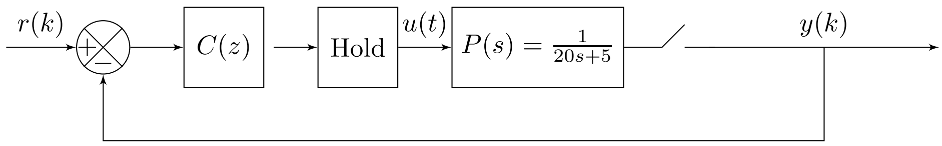
1- (7 p.) Illustra i metodi di discretizzazione delle differenze in avanti e all'indietro, ricavando la legge della trasformazione e discutendone le proprietà di stabilità .

2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$



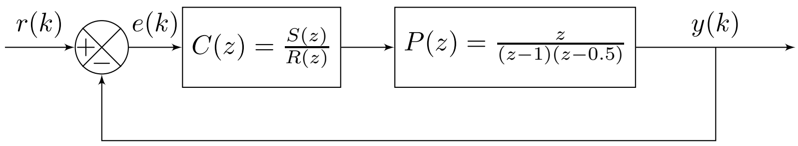
Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema $P(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$ e determina l'intervallo dei valori in $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema collegato in retroazione è asintoticamente stabile.

3- (9 p.) Lo schema seguente rappresenta un sistema di cruise control per un veicolo. Il sistema $P(s) = \frac{1}{20s+5}$ rappresenta il veicolo e ha come uscita la velocità $v(t)$ e come ingresso la coppia esercitata dal motore $u(t)$. Il tempo di campionamento è pari a $T = 1$ s.



Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\tau\alpha w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



in modo che la risposta alla rampa sia di tipo deadbeat.

Soluzione:
Domanda 3

$$x(k) = \sum \text{Res}(\frac{z^{k-1}}{(z-2)^2(z-1)}) ,$$

per $k = 0$ abbiamo due poli in 2 e uno in 1, il grado relativo è pari a 3 e quindi $x(0) = 0$, per $k > 0$ abbiamo un polo doppio in 2 e uno singolo in 1, risulta quindi

$$x(k) = \frac{d}{dz}\frac{z^{k-1}}{z-1}|_{z=2} + \frac{z^{k-1}}{(z-2)^2}|_{z=1} = \frac{(z-1)(k-1)z^{k-2} - z^{k-1}}{(z-1)^2}|_{z=2} + \frac{z^{k-1}}{(z-2)^2}|_{z=1} = (k-3)2^{k-2} + 1 .$$

Domanda 4

Facendo la trasformata zeta,

$$zY(z) - zyC = 1.03Y(z) - 10\frac{z}{z-1} ,$$

da cui

$$Y(z) = \frac{z(C(z-1) - 10)}{(z-1)(z-1.03)} ,$$

quindi, usando l'integrale di inversione

$$y(k) = \frac{1000}{3} + \frac{100(0.03C - 10)}{3}1.03^k ,$$

il numero minimo C per cui $y(k)$ non va a zero si ottiene annullando il secondo termine di questa espressione, quindi ponendo $0.03C - 10 = 0$ da cui $C > \frac{1000}{3}$ quindi $C = 334$.

Domanda 5

La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + kG(z)} = \frac{(z-1)(z-0.5)^2}{(z-1)(z-0.5)^2 + kz^2}$$

l'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^3 + (k-2)z^2 + 1.25z - 0.25,$$

le condizioni necessarie sono

1) $1 > |-0.25|$, verificata

2) $q(1) > 0 \rightarrow k > 0$

3) $q(-1) < 0 \rightarrow k < 4.5$

la tabella di Jury è la seguente

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	$k-2$	1.25	-0.25
2	-0.25	1.25	$k-2$	1
3	15/16	$*$	$-0.25k - 0.75$	

l'ultima condizione è $|15/16| > |-0.25k - 0.75|$, da cui si ottiene

$$k < \frac{3}{4} \text{ oppure } k > -\frac{33}{16} ,$$

mettendo insieme tutte le condizioni otteniamo che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $k \in (0, \frac{3}{4})$.

Domanda 6 Applicando le regole di riduzione, si trova la funzione di trasferimento

$$T_{u^*}^{y^*} = \frac{A(z)B(z)}{1 + B(z) + A(z)(BC)(z)} .$$

Domanda 7

Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento del sistema è data da

$$P(s) = \frac{1}{s + \alpha} .$$

Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s(s+\alpha)}] = \frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha(z-e^{-\alpha T})} \; ,$$

la funzione di trasferimento è quindi

$$T(z) = \frac{\frac{k}{z-1}L(z)}{1+\frac{k}{z-1}L(z)} = \frac{k(1-e^{-\alpha T})}{\alpha(z-e^{-\alpha T})(z-1)+k(1-e^{-\alpha T})} \; .$$

Abbiamo $Q(z) = z^2 + z(-1-e^{-\alpha T}) + e^{-\alpha T} + \frac{k}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})$. Troviamo le condizioni per la stabilità a)

$$1 > |e^{-\alpha T} + \frac{k}{\alpha}(1-e^{-\alpha T})| \rightarrow -\alpha\frac{1+e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}} < k < \alpha \; ,$$

b)

$$Q(1) > 0 \rightarrow k > 0 \; ,$$

c)

$$Q(-1) > 0 \rightarrow k > -2\alpha\frac{1+e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}} \; ,$$

in conclusione il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $k \in (0,\alpha)$.

Parte B

2- Facendo la trasformata di Tustin di $P(z)$ otteniamo

$$P_w(w) = \frac{(1+w)(1-w)}{w(1+3w)} \; ,$$

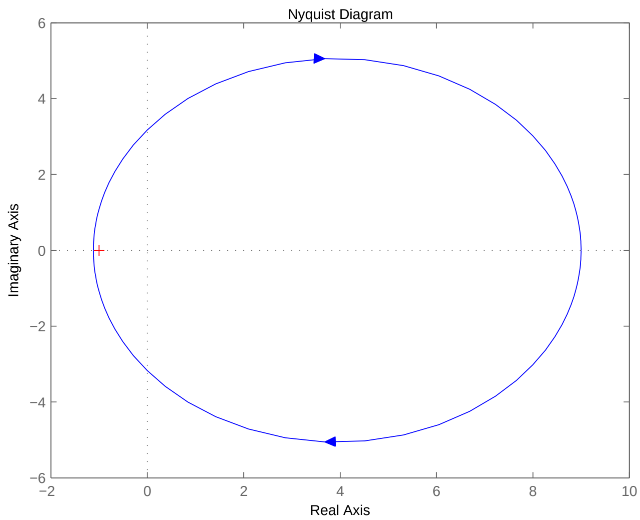
è un sistema di tipo 1 con asintoto in $\sigma = -3$, l'intersezione con l'asse reale è in $-1/3$, si ottiene per $\omega_w \rightarrow +\infty$.

il sistema è stabile se $-\frac{1}{k} < -1/3$, cioè se $k \in (0,3)$.

3- Abbiamo che

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)P(s)] = \frac{1}{5}\frac{1-e^{-0.25}}{z-e^{-0.25}} \; ,$$

passando al piano w otteniamo $L_w(w) = \frac{1-e^{-0.25}}{5}\frac{2-w}{2(1-e^{-0.25})+w(1+e^{-0.25})} = \frac{1}{5}\frac{1-w/2}{1+w\frac{1+e^{-0.25}}{2(1-e^{-0.25})}}$. Per soddisfare alla specifica sul guadagno statico, poniamo $k = 9 \cdot 5 = 24$, ottenendo $L_{2,w}(w) = kL_w(w) = 9\frac{1-w/2}{1+w\frac{1+e^{-0.25}}{2(1-e^{-0.25})}}$. Il diagramma di Nyquist corrispondente è il seguente, l'asse reale viene intersecato per $\omega_w \rightarrow +\infty$ in -1.1192.



Per imporre il margine di ampiezza richiesto, prendiamo $\omega_0 = 3$rad/s, otteniamo $M = 2 * |L_{2,w}(3j)| = 2.681$, $\phi = \pi + \arg(L_{2,w}(3j)) = 0.6707$. Verifichiamo che $M \cos\phi = 2.10 > 1$. Dalle formule di inversione otteniamo $\alpha = 0.2163$, $\tau = 1.0177$, il controllore è dato dunque da

$$C_w(w) = 45\frac{1 + 0.2201s}{1 + 1.018s} \ ,$$

sostituendo $w \to \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$, otteniamo $C(z) = \frac{21.35z+8.3}{z-0.3411}$.

4-

Il controllore è dato da $C(z) = S(z)/R(z)$ e l'impianto da $P(z) = B(z)/A(z)$. Per avere una risposta di tipo deadbeat alla rampa poniamo $R(z) = R'(z)(z-1)$ (visto che il sistema presenta già un polo in 1) inoltre poniamo $S(z) = (z-0.5)S'$, $R'(z) = R''(z)z$ per cancellare i poli e gli zeri stabili. L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)^2 R''(z) + S'(z) = z^l \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 3$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R''] + 2 = \mathrm{Gr}[S'] + 1$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 0$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-1)^2 r_0 + s_1 z + s_0 = z^2 \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_0 = 1, \ s_1 = -2, \ s_0 = -1 \ ,$$

e il controllore risulta

$$C(z) = \frac{(z-0.5)(2z-1)}{(z-1)z} \ .$$