Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 7 Luglio 2008 - Parte A

1- (5 p.) Presenta e dimostra la seguente proprietà ,

$$\mathcal{Z}[x(k) \star y(k)] = \mathcal{Z}[x(k)]\mathcal{Z}[y(k)] \ ,$$

nell'ipotesi $x(k) = y(k) = 0$, se $k < 0$.

2- (5 p.) Descrivi il fenomeno dell'aliasing nella ricostruzione dei segnali campionati e la funzione del filtro anti-alias.

3- (5 pt.) a- Determina la funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto causale che ha la seguente risposta all'impulso per $k \geq 0$

$$h(k) = \begin{cases} 1 \text{ se } k \text{ pari} \\ -1 \text{ se } k \text{ dispari} \ . \end{cases}$$

b- Determina la risposta al gradino unitario dello stesso sistema.

4- (6 p.) Il Curio 244 decade spontaneamente a Plutonio 240 secondo la seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} x(k+1) = \beta x(k) \\ y(k+1) = y(k) + (1-\beta)x(k) \\ x(0) = 100, \ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

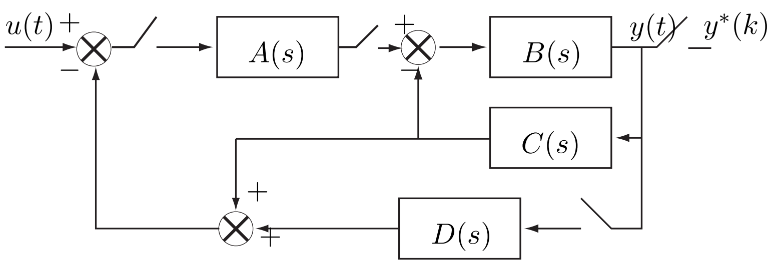
dove $x(k)$ e $y(k)$ rappresentano le quantità in grammi di Curio 244 e, rispettivamente Plutonio 240 all'anno k e $\beta = 0.9622$.

a) Determina le successioni $x(k)$ e $y(k)$.

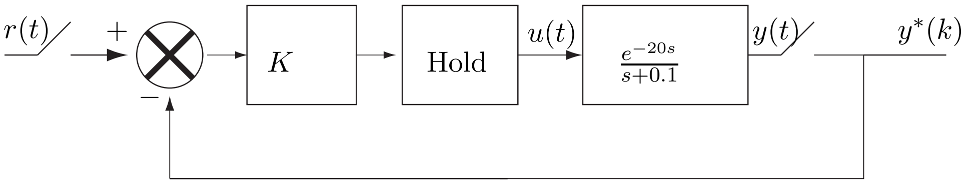
b) Determina dopo quanti anni la quantità iniziale di Curio 244 si dimezza.

c) Determina $y_\infty = \lim_{k\to\infty} y(k)$.

5- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.



6- (7 p.) Il seguente schema rappresenta il sistema di controllo della temperatura di un'automobile. Il segnale $u(t)$ rappresenta la velocità della ventola di aerazione, $y(t)$ la temperatura dell'abitacolo e $r(t)$ la temperatura richiesta dal guidatore. Il tempo di campionamento si suppone pari a 10 secondi.



a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.

b) Determina i valori del guadagno K per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 7 Luglio 2008 - Parte B

1- (7 p.) Presenta e dimostra il metodo di discretizzazione basato sull'invarianza della risposta ai segnali canonici (impulso, gradino e rampa). Discretizza il seguente sistema a tempo continuo con il metodo dell'invarianza rispetto all'impulso

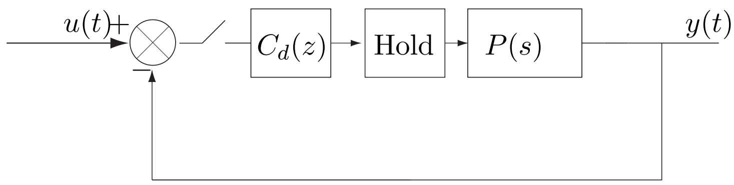
$$P(s) = \frac{1}{s^2} \ .$$

2- (8 p.) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s.

$$P(z) = \frac{1}{2(z-1)z^2} \ .$$

Determina i margini di ampiezza e di fase del sistema collegato in retroazione unitaria.

3- (9 p.) Considera il seguente sistema, dove $P(s) = \frac{1}{(s+10)^2}$.

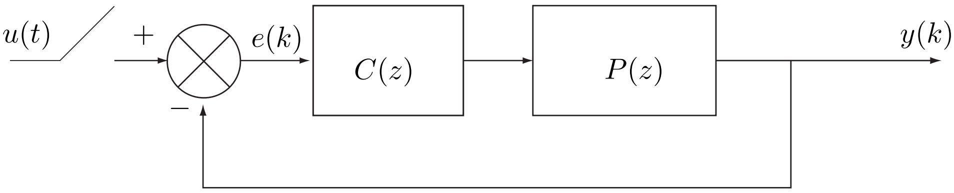


Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete $C(s) = K\frac{(1+\tau\alpha s)}{(1+\tau s)s}$, (che è costituita dalla serie di una rete ritardatrice e di un integratore) in modo da avere il margine di ampiezza pari a $M_A = 2$ e errore a regime alla rampa $u(t) = t$ pari ad 1/20. Nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.01s$. La discretizzazione va effettuata per mezzo della trasformata di Tustin. Verifica la correttezza del tempo di campionamento attraverso il criterio che fa riferimento alla pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale.

4- (6 p.) a- Progetta il controllore $C(z)$ per il seguente sistema, in modo tale che quando in ingresso c'è il segnale $u(t) = \sin(at)$ il segnale errore $e(k)$ si annulli in un numero finito di passi. Assumere $T = 1$.



L'impianto è dato da

$$P(z) = \frac{z}{(z-0.1)(z-0.5)} \ .$$

b- (3 p.) Risolvi lo stesso problema tramite un controllore $C(z)$ di grado relativo pari ad 1.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
Essendo $h(k) = (-1)^k$, risulta
$$H(z) = \frac{z}{z+1} \ ,$$
la risposta al gradino $Y(z)$ è data da
$$Y(z) = H(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} \ ,$$
da cui, antitrasformando
$$y(k) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k) \ .$$

Domanda 4
a- Passando alla trasformata zeta, otteniamo
$$\begin{cases} zX(z) - z100 = \beta X(z) \\ zY(z) = (1-\beta)X(z) + Y(z) \ , \end{cases}$$
da cui otteniamo
$$X(z) = \frac{100z}{z-\beta}, \ Y(z) = \frac{(1-\beta)(100z)}{(z-1)(z-\beta)} \ ,$$
antitrasformando
$$x(k) = 100\beta^k \ , y(k) = 100(1-\beta^k) \ .$$
b- Perchè la quantità iniziale di Curio 244 si dimezzi, occorre che
$$\beta^k = 0.5 \rightarrow e^{\log(\beta)k} = 0.5 \rightarrow k = \frac{\log 0.5}{\log \beta} = 18 \ ,$$
servono quindi 18 anni.

c- Abbiamo $\lim_{k\to\infty} y(k) = 100$, cioè tutta la quantità iniziale di Curio 244 asintoticamente si converte in Plutonio 240.

a) La funzione di trasferimento del sistema è data da
$$T(z) = \frac{K}{(z-0.5)(z+0.5) + Kz} \ ,$$
applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q(z) = z^2 + kz - 0.25$, otteniamo le condizioni

1) $1 > |-0.25|$ verificata $\forall K \in \mathbb{R}$,

2) $q(1) > 0 \rightarrow 1 + K - 0.25 > 0 \rightarrow K > -0.75$,

3) $q(-1) > 0 \rightarrow 1 - K - 0.25 > 0 \rightarrow K < 0.75$, da cui si ha stabilità asintotica se $K \in (-0.75, 0.75)$.

b) In questo caso si ha $q(z) = z^2 + (K + 0.5 - a)z - 0.5a$, otteniamo le condizioni

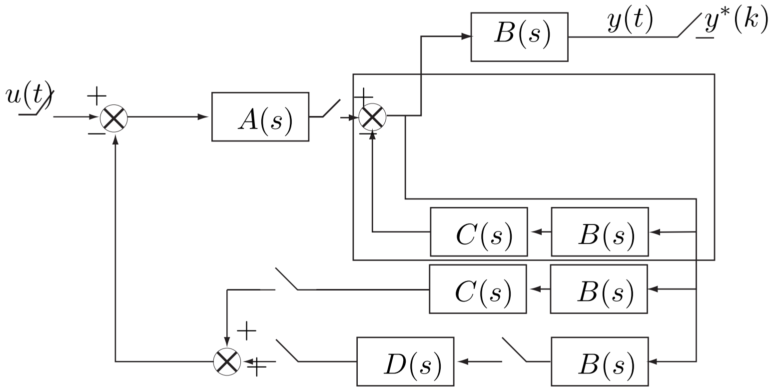
1) $1 > |-0.5a|$ verificata $\forall K \in \mathbb{R}$, $\forall a \in [0.2; 0.8]$,

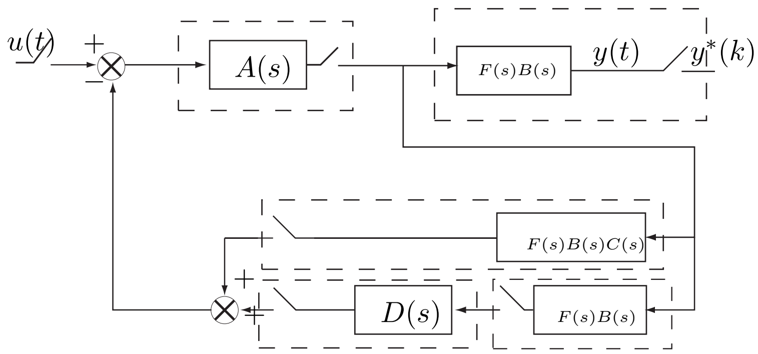
2) $q(1) > 0 \rightarrow 1 + K + 0.5 - a - 0.5a > 0 \rightarrow 1.5(1-a) + K > 0 \rightarrow K > 1.5(a-1) \rightarrow K > 1.5(0.8-1)$,

2) $q(-1) > 0 \rightarrow 1 - K - 0.5 + a - 0.5a > 0 \rightarrow 0.5(1+a) - K > 0 \rightarrow K < 0.5(1+a) \rightarrow K < 0.5(1+0.2)$,

da cui otteniamo che si ha stabilità asintotica per $k \in (-0.3, 0.6)$, che è contenuto nell'intervallo trovato al punto a.

Domanda 5
Lo schema si può trasformare nel seguente modo





dove $F(s) = \frac{1}{1+C(s)B(s)}$, facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{A(z)(FB)(z)}{1 + A(z)((FB)(z)D(z) + (FBC)(z))} \ .$$

Domanda 6

L'equivalente a tempo discreto della serie del filtro di hold e del sistema a tempo continuo è dato da

$$P(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{e^{-20s}}{s(s+0.1)}] = \frac{z-1}{z}z^{-2}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+0.1)}] = \frac{z-1}{z^3}\frac{z10(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{10(1-e^{-1})}{z^2(z-e^{-1})} \ .$$

a) La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{KP(z)}{1+KP(z)} = \frac{10K(1-e^{-1})}{z^2(z-e^{-1}) + K(1-e^{-1})} \ ,$$

b)

b) L'equazione caratteristica è data da

$$q(z) = z^3 - e^{-1}z^2 + 10K(1-e^{-1}),$$

le condizioni per la stabilità asintotica sono date da

$$1) 1 > 10|K|(1-e^{-1}) \rightarrow |K| < \frac{1}{10(1-e^{-1})} = 0.1582,$$

$$2) q(1) > 0 \rightarrow 1 - e^{-1} + 10K(1-e^{-1}) > 0 \rightarrow K > -\frac{1}{10} \ ,$$

$$3) q(-1) < 0 \rightarrow -1 - e^{-1} + 10K(1-e^{-1} < 0 \rightarrow K < \frac{1+e^{-1}}{10(1-e^{-1})} = 0.2164 \ ,$$

la tabella di Jury è data da

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	$10K(1-e^{-1})$	0	$-e^{-1}$	1
2	1	$-e^{-1}$	0	$10K(1-e^{-1})$
3	$100K^2(1-e^{-1})^2-1$	$\star$	$-e^{-1}10K(1-e^{-1})$	

in cui $\star$ rappresenta un termine ininfluente, l'ultima condizione è data da

$$|100K^2(1-e^{-1})^2-1| > |-e^{-1}10K(1-e^{-1})| \ ,$$

la disequazione è risolta per $|k| < 0.1318$ e per $|k| > 0.19$, quindi si ha stabilità asintotica per

$$k \in (-0.1, 0.1318) \ .$$

Parte B

2-
Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P_w(w) = \frac{(1-w)^3}{4w(1+w)^2},$$

il sistema è di tipo 1, quindi presenta un asintoto verticale di ascissa

$$\sigma = 0.5(-3-2) = -1.25 \ ,$$

inoltre $\lim_{w\to+\infty} P(w) = -1/4$, inoltre il diagramma di Nyquist compie un giro e un quarto in senso orario per pulsazioni da 0 all'infinito.

La prima pulsazione $\omega_{w,0}$ di intersezione con l'asse reale soddisfa la condizione

$$\arg P_w(j\omega_{w,0}) = -\pi \to -\frac{\pi}{2} - 5\arctan\omega_{w,0} = -\pi \ ,$$

da cui

$$\omega_{w,0} = \tan(\pi/10) = 0.3249 \ ,$$

inoltre $P_w(j\omega_{w,0}) = -0.8091$ da cui il margine di ampiezza è $M_A = 1.236$. La seconda pulsazione di intersezione con l'asse reale soddisfa la condizione

$$\arg P_w(j\omega_{w,1}) = -2pi \to -\frac{\pi}{2} - 5\arctan\omega_{w,0} = -2\pi \ ,$$

$$\omega_{w,1} = \tan(3\pi/10) = 1.3764 \ ,$$

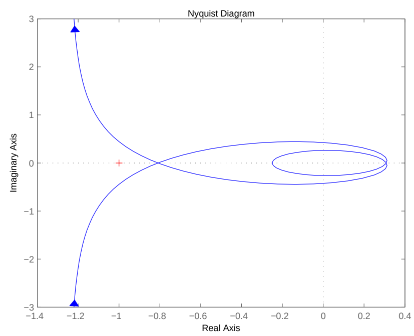
inoltre $P_w(j\omega_{w,1}) = 0.309$.

La pulsazione $\omega_{w,2}$ di intersezione con il cerchio unitario soddisfa la condizione

$$|P_w(j\omega_{w,2})| = 1 \to \frac{\sqrt{1+\omega_{w,2}}}{4\omega_{w,1}} = 1 \to \omega_{w,2} = 1/\sqrt{15} = 0.2582 \ ,$$

essendo $arg(P_w(j1/4)) = -\pi/2 - 5\arctan 0.2582 = -2.8342$, il margine di fase è dato da $M_f = pi - 2.7957 = 0.3074$ radianti che sono 17.61 gradi.

Il diagramma di Nyquist è dunque il seguente



che va completato con un semigiro all'infinito in senso orario.

3-

Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{200}{200+s} ,$$

da cui

$$P_2(s) = P(s)H(s) = 10\frac{200}{s(s+10)^2(s+200)} ,$$

per avere errore a regime alla rampa pari ad 1/10, deve valere la condizione

$$1/10 = \frac{1}{sP_2(0)C(0)} \rightarrow K = 2000 ,$$

poniamo

$$L(s) = K\frac{1}{s}P_2(s) = 20\frac{1}{s(1+s/10)^2(1+s/200)} ,$$

il diagramma di Nyquist di $L(s)$ ha un asintoto verticale di ascissa

$$\sigma = 20(-2/10 - 1/200) = -4.1 ,$$

compie inoltre 3/4 di giro in senso orario

disegnamo il diagramma di Nyquist di $L(s)$, abbiamo

$$L(0) = 9 , \lim_{\omega\rightarrow\infty} L(j\omega) = 0 ,$$

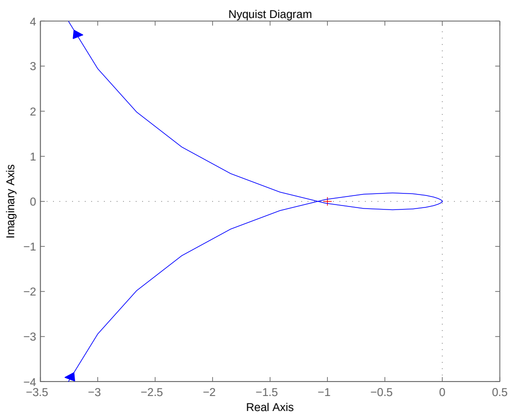
quando ω va da 0 a $+\infty$.

Calcoliamo l'intersezione con l'asse reale, deve valere la condizione

$$\frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{\omega}{10} + \arctan(\omega/200) = \pi ,$$

possiamo trascurare la seconda arcotangente, dato che l'argomento è diviso per 200, ottenendo $\omega_c \simeq 10\tan(\pi/4) = 10$. Inoltre $L(1.7321j) \simeq -1$ che rappresenta il punto di intersezione con l'asse reale.

Il diagramma di Nyquist è il seguente



ceh va completato con un semicerchio all'infinito in senso orario.

Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 5$, abbiamo

$$L(3j) = 3.199e^{-2.523j} ,$$

vogliamo portare questo punto sull'asse reale a -0.5 per avere il margine di fase voluto. Il ritardo di fase è dato da $\phi = \pi - 2.5231 = 0.6185$, l'attenuazione di ampiezza da $M = 2{\cdot}3.199 = 6.398$.

La condizione $M\cos(\phi) = 5.2127 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 1.9259$ e $\alpha = 0.1179$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 2000\frac{1+0.2271s}{s(1+1.926s)} \; .$$

il controllore discretizzato attraverso la regola di Tustin si ottiene attraverso la sostituzione $s \to \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{100}\frac{z-1}{z+1}$.

$$C_d(z) = \frac{1.202z^2 + 0.05179z - 1.15}{z^2 - 1.995z + 0.9948} \; .$$

Valutiamo la scelta del tempo di campionamento. La pulsazione critica adesso è pari a $\omega_0 = 5$, la condizione

$$T < \frac{\pi}{10\omega_0} = 0.0628 \; ,$$

è verificata, il tempo di campionamento scelto è dunque corretto.

4-

a) Sia $C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$, cancelliamo i poli e gli zeri stabili ponendo $R(z) = R'(z)z$, $S(z) = S'(z)(z-0.1)(z-0.5)$. La funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{1}{1+C(z)P(z)} = \frac{R'(z)}{R'(z)+S'(z)} \; ,$$

essendo $U(z) = \frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$, il segnale errore è dato da

$$E(z) = \frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}\frac{R'(z)}{R'(z)+S'(z)} \; ,$$

per annullare l'errore in un numero finito di passi dobbiamo far si che il denominatore di $E(z)$ sia una potenza di z. Poniamo dunque

$$R'(z) = R''(z)(z^2 - 2z\cos a + 1) \; ,$$

l'equazione diofantea è data dunque da

$$R''(z)(z^2 - 2z\cos a + 1) + S' = z^l \; ,$$

con l da determinare.

Per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da Gr$[R'']$+3, il numero di incognite è dato da Gr$[S']$+Gr$[R'']$+2, da cui Gr$[S'] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo Gr$[R]$ = Gr$[S]$ da cui Gr$[R''] + 3 =$ Gr$[S'] + 2$, da cui Gr$[R] = 0$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$r_0(z^2 - 2z\cos a + 1) + s_1 z + s_0 = z^2 \; ,$$

da cui

$$r_0 = 1, \; s_1 = 2\cos a, \; s_0 = -1 \; ,$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z) = \frac{(z-0.1)(z-0.5)(z2\cos a - 1)}{z(z^2 - 2\cos az + 1)} \; .$$

b) In questo caso, per avere il controllore di grado relativo pari ad 1, poniamo Gr$[R]$ = Gr$[S] + 1$ da cui Gr$[R''] + 3 =$ Gr$[S'] + 3$, da cui Gr$[R] = 1$, l'equazione diofantea è quindi

$$(r_1 z + r_0)(z^2 - 2z\cos a + 1) + s_1 z + s_0 = z^3 \; ,$$

da cui

$$r_1 = 1, \; r_0 = 2\cos a, \; s_1 = -1 + 4(\cos a)^2, \; s_0 = -2\cos a \; ,$$

e il controllore è

$$C(z) = \frac{(z-0.1)(z-0.5)((-1+4(\cos a)^2)z - 2\cos a)}{(z+2\cos a)z(z^2 - 2\cos a + 1)} \; .$$