Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova Intermedia di Controlli Digitali del 9 Maggio 2008

1 (5 punti)- Presenta e dimostra la formula per determinare la trasformata zeta di $x(k+n)$ a partire da $X(z)$.

2 (4 punti)- Dimostra che per un sistema a tempo discreto lineare e tempo invariante l'uscita $y(k)$ è data dalla convoluzione discreta dell'ingresso $u(k)$ con la risposta all'impulso del sistema $h(k)$.

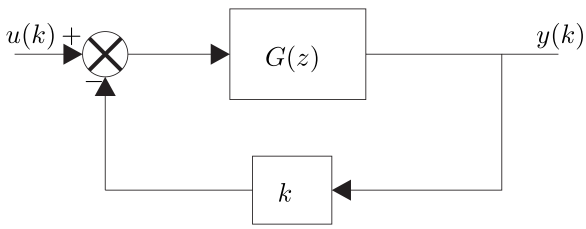
3 (4 punti)- Determina la risposta all'impulso del sistema che ha la seguente funzione di trasferimento

$$X(z) = \frac{z-1}{(z-0.2)^2} \ .$$

4 (5 punti)- Risolvi la seguente equazione alle differenze, dove $u(k) = 1(k)$

$$\begin{cases} y(k+2) = 2y(k+1) - y(k) + u(k) \\ y(0) = 0, \ y(1) = 1 \ . \end{cases}$$

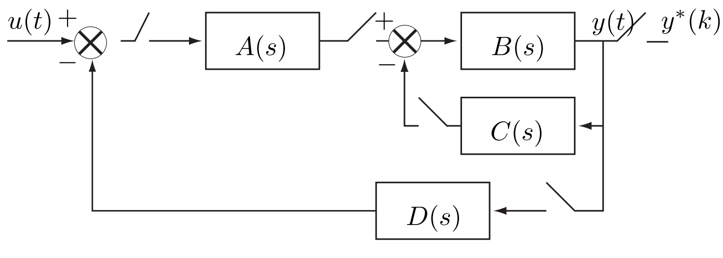
5 (5 punti)- Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ e del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile, assumi $k > 0$ e $a > 0$.



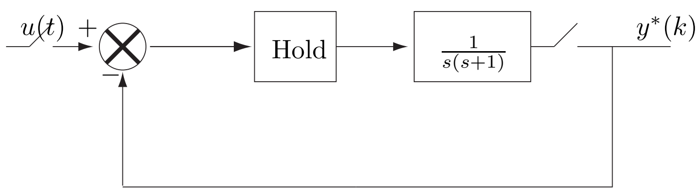
con

$$G(z) = \frac{1}{z^2(z-a)} \ .$$

6 (5 punti)- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.



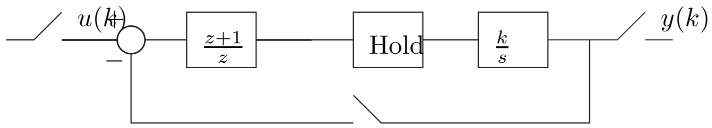
7 (5 punti)- Calcola la funzione di trasferimento del seguente sistema (lasciando il tempo di campionamento in forma simbolica) e determina l'errore a regime al gradino unitario, assumendo che il sistema sia asintoticamente stabile.



Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali per fuoricorso del 9 Maggio 2008 - Parte B

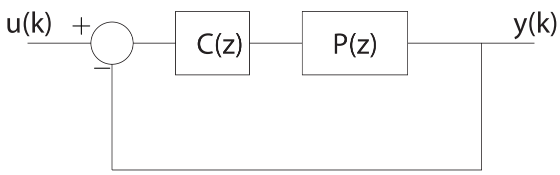
1- (7 p.) Illustra i metodi di discretizzazione delle differenze in avanti e all'indietro, ricavando la legge della trasformazione e discutendone le proprietà di stabilità .

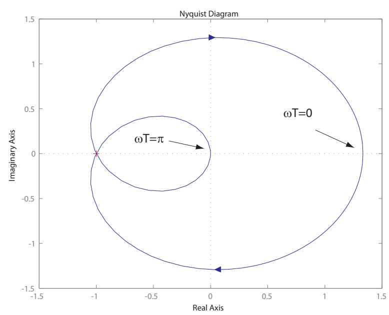
2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$



Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto e determina l'intervallo dei valori in $k > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

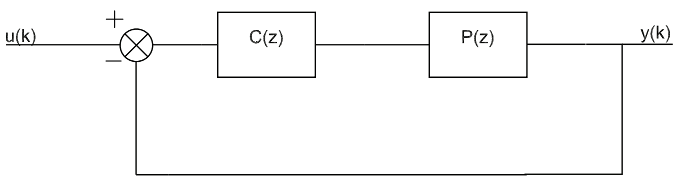
3- (9 p.) Considera il sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z) = \frac{z+1}{z(z+0.5)}$, con tempo di campionamento pari a $T = 2$. Lo schema di controllo e il diagramma di Nyquist di $P(z)$ sono i seguenti.





Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\tau\alpha w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{z+1}{z(z-0.5)} ,$$

in modo che la risposta al gradino unitario sia di tipo deadbeat.

Soluzione:
Domanda 3

$$x(k) = \sum \text{Res}(\frac{(z-1)z^{k-1}}{(z-0.2)^2}) \ ,$$

per $k = 0$ abbiamo due poli in 0.2 e 0, il grado relativo è pari a 2 e quindi $x(0) = 0$, per $k > 0$ abbiamo un unico polo in 0.2 e risulta

$$x(k) = \frac{d}{dz}(z-1)z^{k-1}|_{z=0.2} = z^{k-1} + (z-1)(k-1)z^{k-2}|_{z=0.2} = 0.2^{k-1} - 0.8(k-1)0.2^{k-2} \ .$$

Domanda 4
Facendo la trasformata zeta,

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) = 2(Y(z) - zy(0)) - Y(z) + U(z) \ ,$$

sostituendo $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ e $U(z) = \frac{z}{z-1}$ otteniamo

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3} \ ,$$

da cui

$$y(k) = \sum \text{Res}(\frac{z^{k+1}}{(z-1)^3}) = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}z^{k+1}|_{z=1} = \frac{k(k+1)}{2} \ .$$

Domanda 5
La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+kG(z)} \ ,$$

l'equazione caratteristica è

$$q(z) = z^3 - az^2 + k,$$

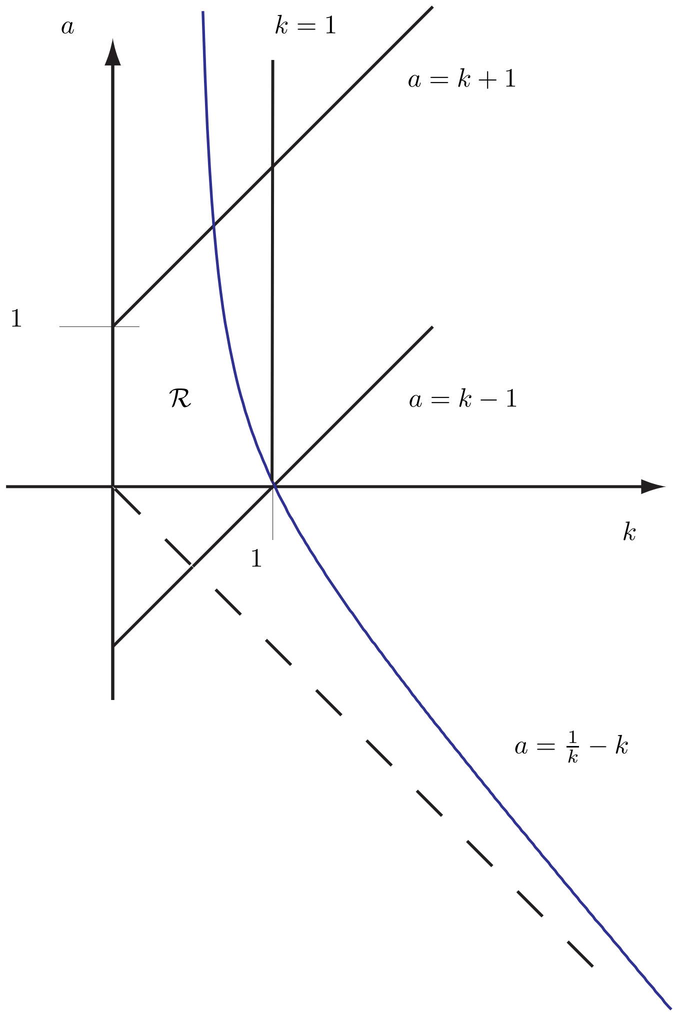
le condizioni necessarie sono, tenendo conto che $a > 0$ e $k > 0$:
1) $1 > |k| \to k \in (0,1)$
2) $q(1) > 0 \to 1 - a + k > 0 \to a < k + 1$
3) $q(-1) < 0 \to -1 - a + k < 0 \to a > k - 1$
la tabella di Jury è la seguente

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	k	0	$-a$	1
2	1	$-a$	0	k
3	k^2-1	a	$-ka$	

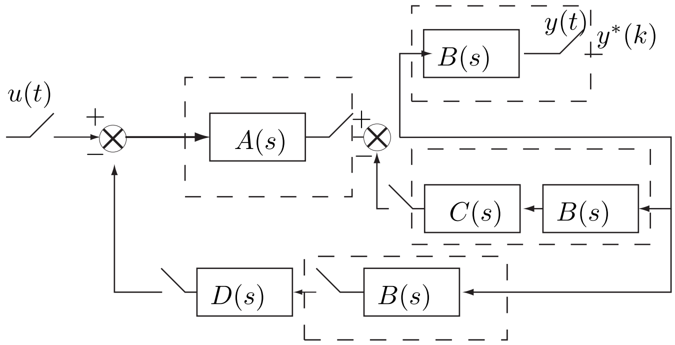
l'ultima condizione è $|k^2 - 1| > |-ka|$, tenendo conto che $k \in (0., 1)$ dalla condizione 1) si ha che $|k^2 - 1| = 1 - k^2$ e inoltre, essendo $a > 0$ $|-ka| = ka$ per cui deve valere

$$1 - k^2 > ka \to a < \frac{1}{k} - k \ ,$$

mettendo insieme le condizioni così trovate sul piano (k, a) otteniamo la figura seguente, la regione di stabilità è indicata con $\mathcal{R}$.



Domanda 6
Lo schema si può trasformare nel seguente modo



facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{A(z)\frac{1}{1+(BC)(z)}B(z)}{1 + A(z)\frac{1}{1+(BC)(z)}B(z)D(z)} = \frac{A(z)B(z)}{1 + BC(z) + A(z)B(z)D(z)} \; .$$

Domanda 7
Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s(s+1)}] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+1)}] \; ,$$

inoltre

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} \ ,$$

da cui

$$L(z) = \frac{z-1}{z}[\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-1}] \ , = \frac{z(T-1+e^{-T}) + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-e^{-T})(z-1)} \ ,$$

la funzione di trasferimento è quindi

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{z(T-1+e^{-T}) + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-e^{-T})(z-1) + z(T-1+e^{-T}) + (1-e^{-T}-Te^{-T})} \ ,$$

nell'ipotesi che il sistema sia asintoticamente stabile, l'errore a regime al gradino è nullo, questo si ottiene applicando il teorema del valore finale. Infatti l'errore è dato da

$$E(z) = \frac{1}{1+T(z)} \frac{z}{z-1}$$

da cui

$$\lim_{k \to +\infty} e(k) = \lim_{z \to 1} E(z)(z-1) = 0 \ .$$

Parte B

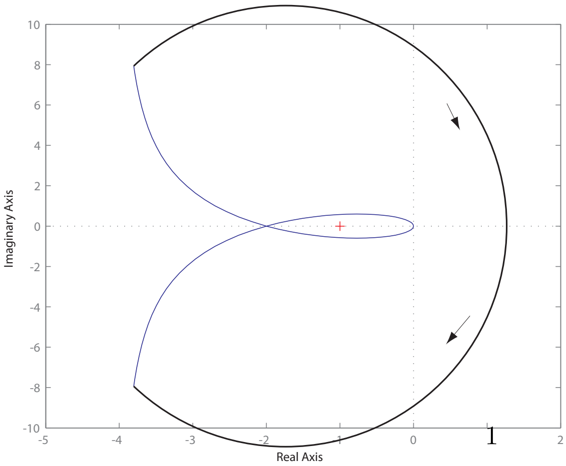
2- Il guadagno di anello del sistema, senza considerare la costante k, è dato da

$$L(z) = \frac{(z+1)(T)}{z(z-1)} ,$$

facendo la trasformata di Tustin otteniamo

$$L_w(w) = \frac{2(1-w)}{(1+w)w} ,$$

è un sistema di tipo 1 con asintoto in $\sigma = -2$, l'intersezione con l'asse reale è in -1 e il diagramma di Nyquist è il seguente



il sistema è stabile se $-\frac{1}{k} < 2$, cioè se $k \in (0, 1/2)$.

3- La trasformata di Tustin del sistema è data da

$$P_w(w) = \frac{4}{3} \frac{1-w}{(1+w)(1+\frac{w}{3})} ,$$

per avere errore a regime al gradino pari a 0.1, deve valere la condizione

$$\frac{1}{1 + C_w(0)P_w(0)} = 1/10 \rightarrow k = \frac{27}{4} ,$$

per la rete ritardatrice, scegliamo come pulsazione ω_0 una pulsazione inferiore all'intersezione con il diagramma di Nyquist, che si otiene ponendo

$$kP_w(w) - \eta = 0 \rightarrow \eta s^2 + s(4\eta + 27) + 3\eta - 27 = 0 ,$$

annullando il termine di grado 1, troviamo che $\eta = -27/4$, sostituendo questo valore si ottiene $\omega_c = \sqrt{7}j = 2.6458j$. Prendiamo $\omega_0 = 2$, abbiamo $kP_w(j2) = 7.489e^{-2.802j}$, da cui $M = 2 \cdot 7.489 = 14.977$ e $\phi = \pi - 2.802 = 0.3393$, dalle formule di inversione si ottiene $\alpha = 0.0624$ e $\tau = 21.0833$, il controllore è dunque

$$C_w(w) = \frac{27}{4} \frac{1 + 0.2716s}{1 + 17.67s} ,$$

passando al piano z otteniamo, ponendo $w = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{z+1}$,

$$C(z) = \frac{0.4598z + 0.2634}{z - 0.8929} .$$

4-

Il controllore è dato da $C(z) = S(z)/R(z)$ e l'impianto da $P(z) = B(z)/A(z)$. Per avere una risposta di tipo deadbeat al gradino poniamo $R(z) = R'(z)(z-1)$, inoltre poniamo $S(z) = z(z-0.5)S'$ per cancellare i poli stabili. L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)R'(z) + (z+1)S'(z) = z^l \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 1 = \mathrm{Gr}[S'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 1$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-1)(r_1 z + r_0) + (z+1)s_0 = z^2 \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_1 = 1, \ r_0 = 1/2, \ s_0 = 1/2$$

e il controllore risulta

$$C(z) = \frac{1/2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1/2)} \ .$$