Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 10 Luglio 2007 - Parte A

1- (6 p.) 1- Illustra il metodo della formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta e dimostra il risultato presentato. Usa la formula di inversione per calcolare l'antitrasformata di $X(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$.

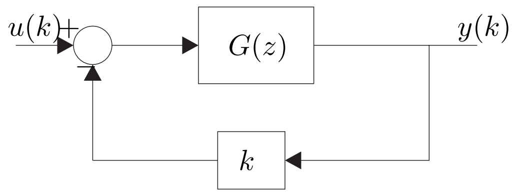
2- (5 p.) Definisci il filtro di ricostruzione ideale per un segnale a banda limitata e calcolane la risposta all'impulso.

3- (7 p.) Considera il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^3} ,$$

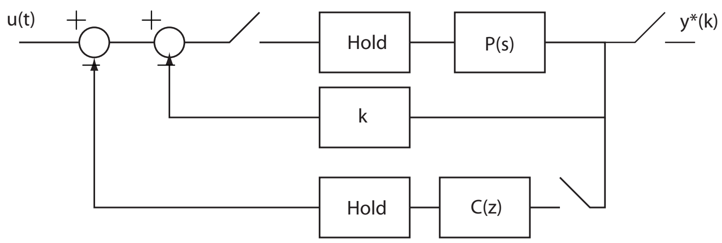
a) Trova l'equazione alle differenze che lega i segnali $u(k)$ e $y(k)$.
b) Determina la risposta all'impulso del sistema.
c) Determina l'uscita del sistema quando $u(k) = 1(k)$, determina sia il grafico che l'espressione analitica.

4- (8 p.) a)- Determina i valori di $k > 0$,$a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile, con $G(z) = \frac{z^2+az-1}{z^2}$. e disegna la corrispondente regione sul piano (k, a).



b) Poni ora $k = 1$ e $a = 0.5$, determina il margine di ampiezza del sistema. (Nota: non è necessario fare il diagramma di Nyquist).

5- (7 p.) a- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti.
b- Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$. Assumi $P(s) = \frac{1}{s+a}$, $C(z) = z^{-1}$.



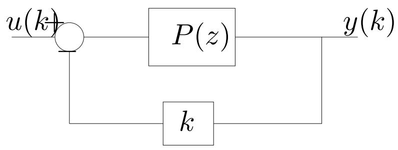
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 10 Luglio 2007 - Parte B

1- (7 p.) Illustra il metodo di discretizzazione basato sulla trasformazione di Tustin, ricavando le espressioni delle trasformazioni e discuti la stabilità dei controllori ottenuti.

2- (9 p.) a) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s.

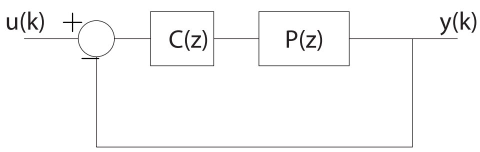
$$P(z) = \frac{z + 0.5}{z(z-1)} \ .$$

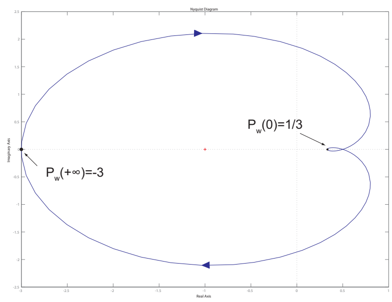
b) Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato e determina il valore del guadagno k per cui il margine di ampiezza è pari a 4.



3- (9 p.) Considera il seguente sistema discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e

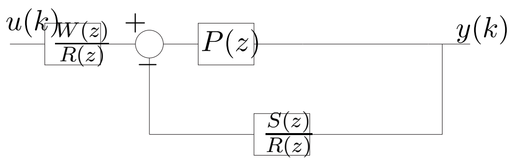
$$P(z) = \frac{(z-0.5)}{z(z+0.5)}, \ P_w(w) = 1/3\frac{(1+3w)(1-w)}{(1+w/3)(1+w)} \ .$$





Il grafico riporta il diagramma di Nyquist di $P_w(w)$, ottenuto applicando la trasformata di Tustin. Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/6 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{(z-0.5)(z+0.5)}{z^2(z-1)^2} \ ,$$

in modo che la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(k)$ e l'uscita $y(k)$ sia data da

$$T(z) = \frac{1}{z(z+0.2)} \ .$$

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Antitrasformando l'equazione alle differenze è data da

$$y(k) = u(k) + u(k-1) + u(k-2) + u(k-3) \; .$$

b) La risposta all'impulso si ottiene antrasformando direttamente $P(z)$ ed è data da

$$p(k) = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0, \ldots, 3 \\ 0 \text{ se } k > 3 \end{cases}$$

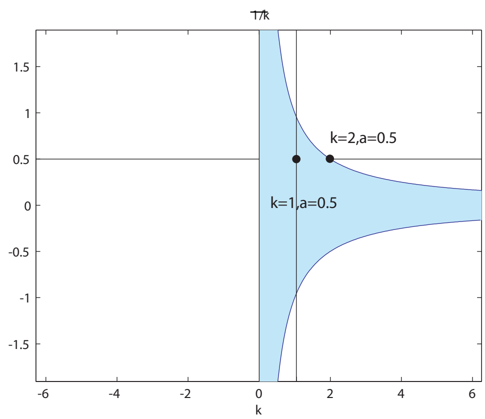
c) Il modo più semplice di fare il calcolo consiste nel sostituire $u(k)$ nell'equazione alle differenze, con condizioni iniziali nulle, si ottiene

$$y(0) = 1, \; y(1) = 2, \; y(2) = 3, \; y(3) = 4, \; y(k) = 4, \; \forall k \geq 4.$$

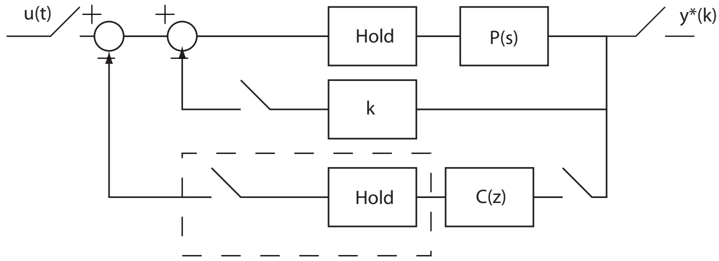
Domanda 4
a) La funzione di trasferimento del sistema è data da

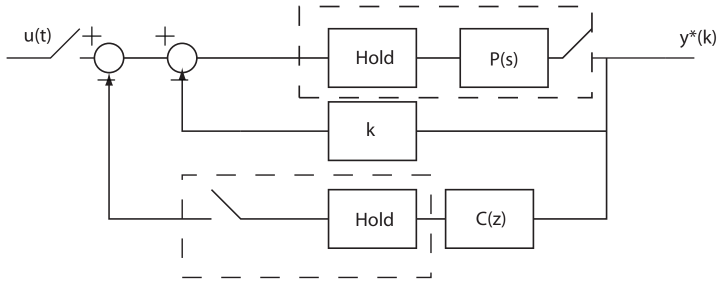
$$T(z) = \frac{z^2}{(k+1)z^2 + akz - k}$$

applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q = (k+1)z^2 + akz - k$, otteniamo le condizioni
1) $k + 1 > |k|$ sempre verificata
2) $q(1) > 0 \rightarrow a > -1/k$
3) $q(-1) > 0 \rightarrow a < 1/k$
facendo l'intersezione di queste tre condizioni, troviamo il dominio rappresentato in blu in figura.



b) Il margine di ampiezza rappresenta il massimo fattore di riduzione o di aumento del guadagno di anello per cui la stabilità del sistema è conservata. In questo caso per $a = 0.5$, il sistema è stabile quando $k \in (0, 2)$. Quindi se $k = 1$ il massimo fattore di incremento del guadagno che conserva la stabilità è 2, che rappresenta anche il margine di ampiezza.
Domanda 5





dove è stato usato il fatto che è possibile scambiare un campionatore con il blocco che contiene il guadagno k, si sarebbe anche potuto portare il punto di prelevamento del segnale a monte di $P(s)H(s)$, sdoppiando questi blocchi.

facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati e osservando che $\mathcal{Z}[H(s)] = 1$, otteniamo

$$T(z) = \frac{(PH)(z)}{1 + (C(z) + k)(PH)(z)},$$

inoltre $\mathcal{Z}[P(s)H(z)] = \frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})}$, da cui

$$T(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{a(kz+1)(z-e^{-aT}) + (1-e^{-aT})z} \ .$$

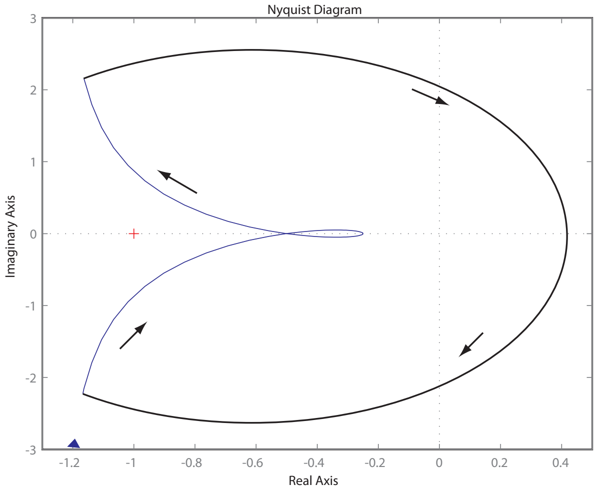
Parte B

2- Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = 3/4\frac{(1+w/3)(1-w)}{(1+w)w} \ .$$

l'asintoto è in $\sigma = 3/4(1/3 - 1 - 1) = -5/4$. Consideriamo l'equazione $\eta + P(w) = 0$, otteniamo $w^2(4\eta - 1) + w(4\eta - 2) + 3 = 0$, annulliamo il termine di grado 1, ottenendo $\eta = 0.5$, sostituendo questo valore nell'equazione otteniamo $w^2 + 3 = 0$ da cui la pulsazione critica è $\omega_w = \sqrt{3}$ rad/s.

Il diagramma di Nyquist è il seguente



per avere il margine di ampiezza pari a 4 dobbiamo avere l'intersezione con il diagramma di Nyquist in -0.25, occorre quindi scegliere $k = 0.5$.

3-

Dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che

$$\lim_{w \to 0} P_w(w) C_w(w) = 5 \to k = 15 \ .$$

Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 10$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P_w(10j)) = 0.4575, \ M = 2|P_w(10j)| = 86.25$$

la condizione $M\cos(\phi) = 77.87 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 19.32$ e $\alpha = 0.0104$, il controllore continuo risulta dunque

$$C_w(w) = 15 \frac{1 + 0.2005w}{1 + 19.32w} \ .$$

il controllore discreto, ottenuto con la trasformata di Tustin inversa è dato da

$$C(z) = 0.05907 \frac{z + 0.666}{z - 0.9016} \ .$$

4-

Poniamo $S(z) = z^2 S'(z)$, $W(z) = z^2 W'(z)$, $R(z) = (z - 0.5)(z + 0.5) R'(z)$, la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{W'}{R'(z-1)^2 + S'} \ ,$$

per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 3$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 2 = \mathrm{Gr}[S'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R] = 1$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$(r_1 z + r_0)(z-1)^2 + (s_1 z + s_0) = (z + 0.2) z^2 \ ,$$

in cui il polo in 0 è stato aggiunto per avere grado 2 nel membro destro dell'equazione. Per avere la funzione di trasferimento richiesta poniamo inoltre $W' = z$ (in questo modo il termine z si cancella nella funzione di trasferimento).

Otteniamo il sistema

$$r_1 = 1; (r_0 - 2r_1) = 0.2; r_1 - 2r_0 + s_1 = 0; r_0 + s_0 = 0;$$

da cui

$$r_1 = 1,\ r_0 = 2.2,\ s_1 = 3.4,\ s_0 = -2.2\ .$$

quindi

$$S(z) = (3.4z - 2.2)z^3,\ W(z) = z^3,\ R(z) = (z - 0.5)(z + 0.5)(z + 2.2)\ .$$