Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'11 Febbraio 2008 - Parte A

1- (6 p.) Presenta e dimostra il metodo dell'integrale di inversione per il calcolo dell'anti-trasformata zeta.

2- (5 p.) Presenta e dimostra una condizione necessaria e sufficiente perchè il polinomio $az^2 + bz + c = 0$ abbia le sue radici all'interno del cerchio unitario.

3- (6 p) Un sistema a tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{z}{(z^2 - 0.6z + 0.25)(z - 0.5)}$$

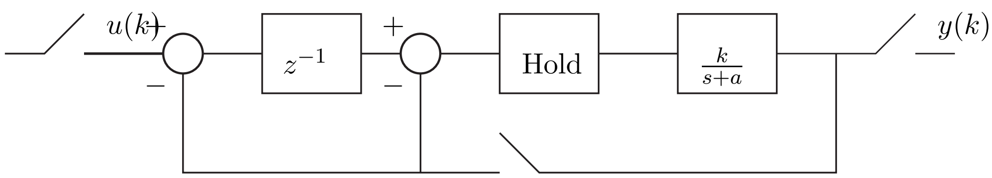
a) Determina la risposta all'impulso del sistema.
b) Determina l'uscita del sistema a regime quando il segnale di ingresso è il gradino unitario.

4- (8 p.) Le funzioni $t_1(k)$ e $t_2(k)$ rappresentano le temperature in gradi di due stanze al minuto k-esimo, isolate termicamente rispetto al mondo esterno. Le due stanze scambiano calore attraverso una parete di separazione e le loro temperature soddisfano la seguente equazione alle differenze, in cui $\mu \in (0, 1)$ è un parametro di scambio termico:

$$\begin{aligned} t_1(k+1) &= t_1(k) + \mu(t_2(k) - t_1(k)) \\ t_2(k+1) &= t_2(k) + \mu(t_1(k) - t_2(k)) \end{aligned}$$

assumendo $t_1(0) = 10°$ e $t_2(0) = 30°$, determina $T_1(z)$ e la funzione $t_1(k)$.

5- (8 p.) Considera lo schema seguente

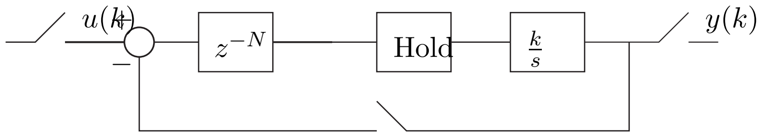


Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile (assumi $a > 0$).

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'11 Febbraio 2008 - Parte B

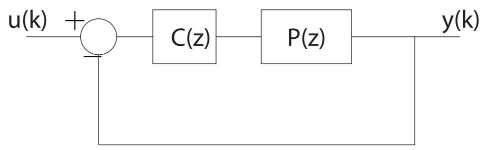
1- (7 p.) Illustra il metodo di discretizzazione basato sulla trasformata di Tustin, ricavando la legge della trasformazione e discutendone le proprietà di stabilità .

2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$



a) Assumi $N = 2$, disegna il diagramma di nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto e determina l'intervallo dei valori in $k > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
b) Ripeti quanto fatto nel punto a) per un generico $N > 2$.

3- (9 p.) Considera il seguente sistema a tempo discreto in cui $P(z) = \frac{1}{z(z-0.5)}$.

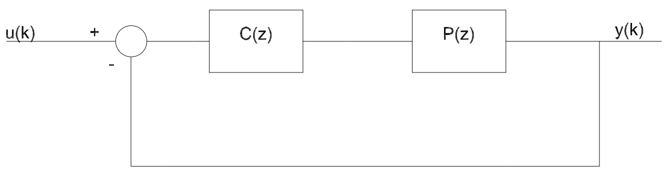


Trova un controllore $C(z)$ di struttura

$$C(z) = \frac{k(z-0.5)}{z+a} ,$$

che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. (Suggerimento: determina prima il guadagno statico k in funzione di a, poi passa al piano w per imporre il passaggio del diagramma di Nyquist per il punto -0.5).

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{(z-2)}{(z+0.5)z} ,$$

in modo che la risposta al segnale di ingresso $u(k) = k$ sia di tipo deadbeat (cioè che il segnale errore si annulli in un numero finito di passi).
b) Disegna il grafico della funzione errore $e(k) = y(k) - u(k)$. In quanti passi si annulla l'errore?

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Tramite l'integrale di inversione possiamo calcolare $x(k)$ in questo modo

$$x(k) = \sum \mathrm{Res} \frac{z z^{k-1}}{(z^2-0.6z+0.25)(z-0.5)} =$$
$$= \sum \mathrm{Res} \frac{z^k}{(z-0.3-0.4j)(z-0.3+0.4j)(z-0.5)} \ ,$$

inoltre

$$\mathrm{Res}(\frac{z^k}{(z-0.3-0.4j)(z-0.3+0.4j)(z-0.5)}, 0.5) = 5 \cdot 0.5^k \ ,$$

$$\mathrm{Res}(\frac{z^k}{(z-0.3-0.4j)(z-0.3+0.4j)(z-0.5)}, 0.3+0.4j) = 5/2\sqrt{5} \cdot 0.5^k e^{\pi/2+\arctan 2+\arctan(4/3)k},$$

usando il fatto che la somma dei residui associati a due poli complessi coniugati è data da due volte la parte di reale di uno di essi, otteniamo

$$x(k) = 5 \cdot 0.5^k + 5/2\sqrt{5}\cos(\pi/2+\arctan 2+\arctan(4/3)k) \ .$$

b) Se $y(k)$ è l'uscita corrispondente al gradino in ingresso, l'uscita a regime è data da

$$y_\infty = \lim_{z\to 1} P(z)\frac{z}{z-1}(z-1) = P(1) = 3.077 \ ,$$

che corrisponde al guadagno statico del sistema.

Domanda 4
Passando alla trasformata zeta, le equazioni alle differenze diventano

$$zT_1(z) - zt_1(0) = T_1(z) + \mu(T_2(z) - T_1(z))$$
$$zT_2(z) - zt_2(0) = T_2(z) + \mu(T_1(z) - T_2(z)) \ .$$

sommando le due equazioni si ottiene

$$T_1(z) + T_2(z) = \frac{z}{z-1}(t_1(0) + t_2(0)) \ ,$$

da cui

$$T_2(z) = -T_1(z) + \frac{z}{z-1}(t_1(0) + t_2(0)) \ ,$$

sostituendo nella prima delle equazioni iniziali

$$zT_1(z) - zt_1(0) = T_1(z) + \mu(-2T_1(z) + \frac{z}{z-1}(t_1(0) + t_2(0))) \ ,$$

quindi

$$T_1(z) = \frac{z}{(z-1+2\mu)(z-1)}[(z-1)t_1(0) + \mu(t_1(0) + t_2(0))] \ ,$$

antistrasformando

$$t_1(k) = \frac{t_1(0)+t_2(0)}{2} + (1-2\mu)^k(t_1(0) - (t_1(0)+t_2(0))/2) = 20 - 10 \cdot (1-2\mu)^k \ .$$

Domanda 5
Abbiamo $\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+a}] = \frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})}$. Il guadagno di anello complessivo del sistema è dato da

$$L(z) = z^{-1}L_1(z) \ ,$$

dove il guadagno dell'anello interno è dato da $L_1(z) = \frac{k(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})+k(1-e^{-aT})}$, l'equazione caratteristica è dunque

$$1 + L(z) = 0 \rightarrow az^2 + z(-ae^{-aT} + k(1 - e^{-aT})) + k(1 - e^{-aT}) \ ,$$

il sistema è asintoticamente stabile se e solo se sono verificate le tre condizioni:
1) $a > |k|(1 - e^{-aT}) \rightarrow -\frac{a}{1-e^{-aT}} < k < \frac{a}{1-e^{-aT}}$,
2) $(1 - e^{-aT})(a + 2k) > 0 \rightarrow k > \frac{-a}{2}$,
3) $a(1 + e^{-aT}) > 0$ sempre verificata percè $a > 0$,
essendo $-\frac{a}{1-e^{-aT}} < \frac{a}{2}$ sempre, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$-\frac{a}{2} < k < \frac{a}{1 - e^{-aT}} \ .$$

Parte B

2- Prendiamo il caso generico con $N \geq 2$. La funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema è data da

$$L(z) = \frac{2k}{z^N(z-1)} \ ,$$

passando al piano w, con $z = \frac{1+w}{1-w}$, otteniamo

$$L(w) = \frac{k(1-w)^{N+1}}{(1+w)^N w} \ ,$$

il sistema è di tipo 1, l'ascissa dell'asintoto è data da

$$\sigma = -k((N+1) + N) = -(2N+1)k \ ,$$

abbiamo che $\lim w \rightarrow \infty L(w) = k(-1)^n$, è quindi pari a k se n è pari e $-k$ se n è dispari. Inoltre

$$\arg L(j\omega_w) = -\frac{\pi}{2} - (2N+1)\arctan(\omega_w) \ ,$$

e $\lim_{\omega_w \rightarrow +\infty} \arg L(j\omega_w) = -(N+1)\pi$, quindi il diagramma di nyquist compie $(2N+1)/4$ giri in senso antiorario attorno all'origine. Inoltre $|L(j\omega_w)| = |k|\frac{\sqrt{1+\omega_w^2}}{\omega_w}$ è una funzione descrescente in ω_w, quindi l'intersezione con l'asse reale negativo a parte reale minore è la prima. Determiniamo questa intersezione ponendo

$$\arg L(j\omega_w) = -\pi \rightarrow \omega_c = \tan\frac{\pi}{4N+2} \ ,$$

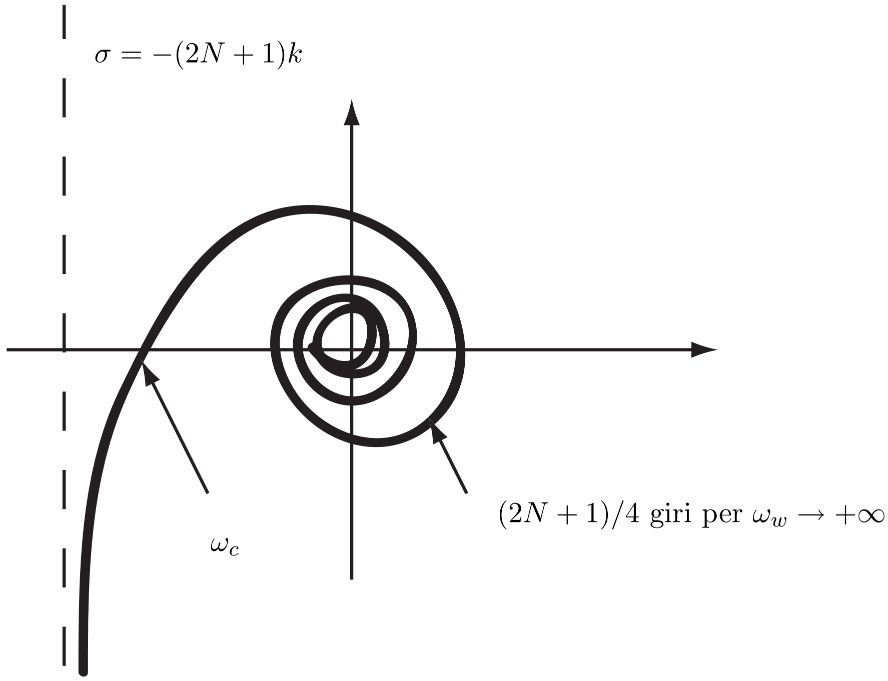
da cui, considerando che $L(j\omega_c) = -|L(j\omega_c)$

$$L(j\omega_c) = -k\frac{\sqrt{1+\tan^2\frac{\pi}{4N+2}}}{\tan\frac{\pi}{4N+2}} \ ,$$

il sistema è dunque asintoticamente stabile per $L(j\omega_c) > -1$ per cui

$$k < \frac{\tan\frac{\pi}{4N+2}}{2\sqrt{1+\tan^2\frac{\pi}{4N+2}}},$$

ad esempio per $N = 9$ si ottiene $k < 0.0826$. In genere la stabilità si ha solo con valori molto piccoli del guadagno k, questo è tipico dei sistema con un ritardo grande nella funzione di trasferimento ad anello aperto. Il diagramma di Nyquist qualitativo è il seguente



3- La funzione di trasferimento ad anello aperto è data da

$$L(z) = \frac{k}{z(z+a)} ,$$

per avere errore a regime pari a 0.1 dobbiamo porre

$$1 + L(1) = 1/10 \to k = 9(1+a) ,$$

passando al piano w con la trasformazione bilineare, prendendo ad esempio $T = 2$, otteniamo

$$L(w) = \frac{k(1-w)^2}{(1+w)((1+a)+w(1-a))} = \frac{k}{1+a}\frac{(1-w)^2}{(1+w)(1+\frac{1-a}{1+a}w)} = 9\frac{(1-w)^2}{(1+w)(1+\frac{1-a}{1+a}w)} ,$$

imponiamo che il diagramma di Nyquist passi per -0.5 per far questo imponiamo che $L(w) - (-0.5)$ abbia tutte radici puramente immaginarie, otteniamo

$$L(w) + 0.5 = 0 \to (1+w)(1 + \frac{1-a}{1+a}w) + 18(1-w)^2 = 0 ,$$

da cui

$$w^2(18 + \frac{1-a}{1+a}) + w(1 + \frac{1-a}{1+a} - 36) + 19 = 0; ,$$

per avere radici puramente immagiarie occorre annullare il termine di primo grado:

$$1 + \frac{1-a}{1+a} - 36 \to a = -17/18 ,$$

verifichiamo che questo valore corrisponda a una intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale sostituendo questo valore di a nell'equazione precedente, otteniamo

$$53w^2 + 19 = 0 \to w = 0.5987j ,$$

che rappresenta il valore di pulsazione critica. Sostituendo i valori di a e k trovati il controllore diventa

$$C(z) = \frac{0.5(z-0.5)}{z-17/18} .$$

4- La funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{1}{1 + P(z)C(z)} \ ,$$

poniamo $C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$ e cancelliamo i poli stabili del sistema scrivendo $S(z) = z(z + 0.5)S'(z)$, poniamo inoltre $R(z) = (z-1)^2 R'(z)$ per avere errore a regime nullo alla rampa. Per avere risposta di tipo deadbeat poniamo

$$1 + P(z)C(z) = z^l \ ,$$

Il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[R\prime] + \mathrm{Gr}[S'] + 2$, il numero di equazioni da $\mathrm{Gr}[R'] + 3$, otteniamo quindi $\mathrm{Gr}[S'] = 1$. Dalla condizione di grado relativo nullo per il controllore otteniamo $\mathrm{Gr}[R'] = 1$. L'equazione diofantea è data quindi da

$$(z-1)^2(r_1 z + r_0) + (z-2)(s_1 z + s_0) = z^3 \ ,$$

risolvendo otteniamo

$$r_1 = 1, \ r_0 = 6, \ s_1 = -4, \ s_0 = 3,$$

il controllore cercato è dunque

$$C(z) = \frac{z(z + 0.5)(-4z + 3)}{(z-1)^2(z+6)} \ .$$

La trsformata dell'errore è data da

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + P(z)C(z)} = \frac{z(z+6)}{z^3} \ ,$$

antitrasformando, troviamo la funzione errore

$$e(k) = \delta(k-1) + 6 \cdot \delta(k-2) \ ,$$

l'errore si annulla quindi dopo 3 passi.