Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 16 Giugno 2008 - Parte A

1- (5 p.) Presenta e dimostra la formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta di $X(z)$.

2- (5 p.) Definisci la risposta all'impulso di un sistema a tempo discreto e calcola la risposta all'impulso del seguente sistema, in cui $u(k)$ è il segnale di ingresso e $y(k)$ il segnale di uscita

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} 0.5^k u(k-i) \; .$$

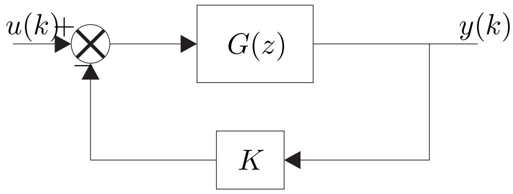
3- (6 p.) La successione $x(k)$ rappresenta il numero di conigli in possesso di un allevatore. All'inizio di ogni anno l'allevatore vende $\beta x(k)$ conigli, con $0 < \beta < 1$. L'anno successivo i conigli rimanenti raddoppiano di numero, inoltre $x(0) = 100$. La successione $x(k)$ soddisfa quindi la seguente equazione alle differenze

$$x(k+1) = 2(1-\beta)x(k) \; ,$$

a) determina la successione $y(k)$, che rappresenta il totale dei conigli venduti dall'allevatore negli anni precedenti al k-esimo (cioè negli anni $0, 1, \ldots, k-1$).

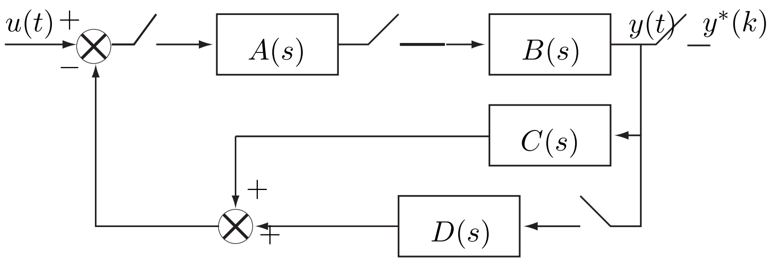
b) determina il coefficiente β che consente al contadino di mantenere costante il numero di conigli nell'allevamento.

4- (7 p.) a)- Determina i valori di $K \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile, con $G(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z+0.5)}$.

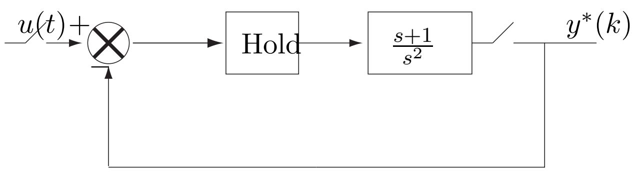


b) Supponi ora che il sistema sia descritto da $G(z) = \frac{z}{(z-a)(z+0.5)}$, trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ ciascuno dei quali assicura la stabilità asintotica del sistema per tutti i valori di $a \in [0.2,\; 0.8]$.

5- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.



6- (5 p.) a) Calcola la funzione di trasferimento del seguente sistema, lasciando il tempo di campionamento T indicato in forma simbolica (può essere utile la relazione $\mathcal{Z}[\frac{1}{s^3}] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$).



b) Determina i valori del tempo di campionamento T per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 16 Giugno 2008 - Parte B

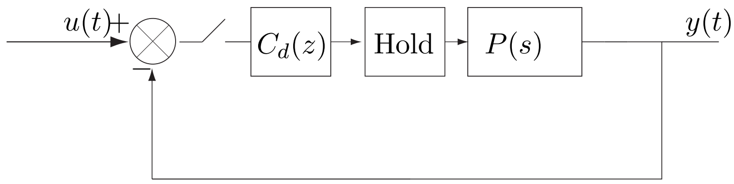
1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi a tempo discreto. Qual'è l'uscita a regime del sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z) = \frac{1}{z-0.5}$, se in ingresso ha il segnale $u(k) = \sin(0.1k)$?

2- (8 p.) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s.

$$P(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z+0.8)} .$$

Determina il margine di ampiezza del sistema e la pulsazione critica sia nel piano w che nel piano z.

3- (8 p.) Considera il seguente sistema, dove $P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$.

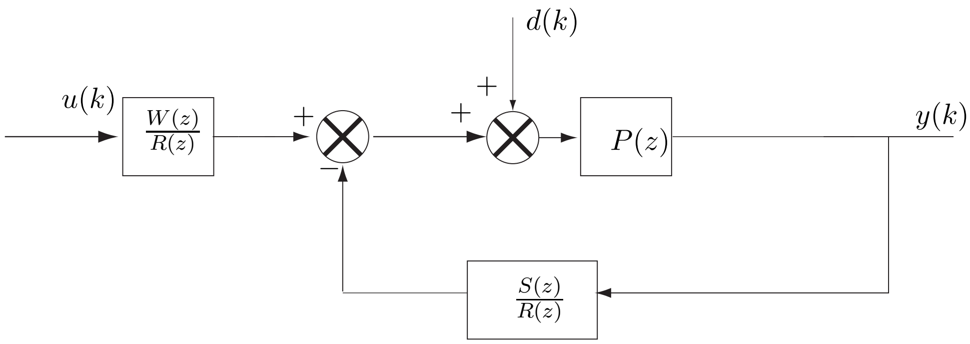


Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete anticipatrice $C(s) = k\frac{1+\tau s}{1+\tau\alpha s}$ in modo da avere il margine di ampiezza pari a $M_A = 2$ e errore a regime al gradino unitario pari ad 1/10. Nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.01s$. La discretizzazione va effettuata per mezzo della corrispondenza poli-zeri. Verifica la correttezza del tempo di campionamento attraverso il criterio che fa riferimento alla pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale. (Nota: tieni conto di possibili approssimazioni nel calcolo dell'intersezione con l'asse reale).

4- a) (6 p.) Progetta i polinomi $W(z)$, $R(z)$, $S(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{z+0.5}{(z-2)(z-0.5)} ,$$

in modo che il la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(k)$ e l'uscita $y(k)$ sia pari a $T(z) = \frac{1}{z-0.1}$.

b) (4 p.) Risolvi lo stesso problema facendo anche in modo che il contributo del disturbo $d(k) = 1(k)$ sull'uscita vada asintoticamente a 0.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3

a) Se $y(k)$ è il numero totale di conigli venduti, $y(k)$ soddisfa all'equazione

$$\begin{cases} y(k+1) = y(k) + \beta x(k) \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

facendo la trasformata zeta di $x(k)$ e $y(k)$ otteniamo

$$\begin{cases} zY(z) = Y(z) + \beta X(z) \\ zX(z) - 100z = 2(1-\beta)X(z) \ , \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} X(z) = \frac{100z}{z-2(1-\beta)} \ , Y(z) = \frac{100\beta z}{(z-2(1-\beta))(z-1)} \ , \end{cases}$$

antitrasformando si trova

$$\begin{cases} x(k) = 100(2(1-\beta))^k y(k) = \frac{100\beta}{1-2\beta}(2(1-\beta)^k - 1) \ , \end{cases}$$

per mantenere costante il numero di conigli deve essere $2(1-\beta) = 1$ da cui $\beta = 0.5$.

Domanda 4

a) La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{K}{(z-0.5)(z+0.5)+Kz} \ ,$$

applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q(z) = z^2 + kz - 0.25$, otteniamo le condizioni

1) $1 > |-0.25|$ verificata $\forall K \in \mathbb{R}$,

2) $q(1) > 0 \rightarrow 1 + K - 0.25 > 0 \rightarrow K > -0.75$,

3) $q(-1) > 0 \rightarrow 1 - K - 0.25 > 0 \rightarrow K < 0.75$, da cui si ha stabilità asintotica se $K \in (-0.75, 0.75)$.

b) In questo caso si ha $q(z) = z^2 + (K + 0.5 - a)z - 0.5a$, otteniamo le condizioni

1) $1 > |-0.5a|$ verificata $\forall K \in \mathbb{R}$, $\forall a \in [0.2; 0.8]$,

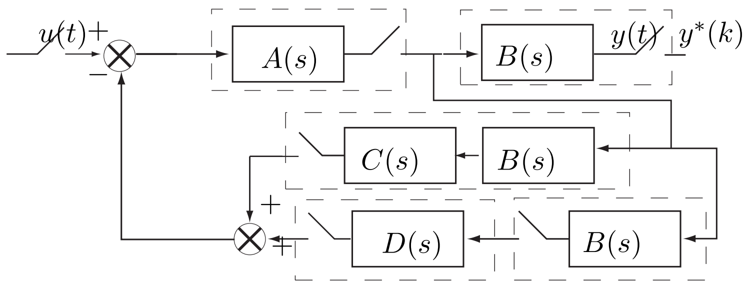
2) $q(1) > 0 \rightarrow 1 + K + 0.5 - a - 0.5a > 0 \rightarrow 1.5(1-a) + K > 0 \rightarrow K > 1.5(a-1) \rightarrow K > 1.5(0.8-1)$,

2) $q(-1) > 0 \rightarrow 1 - K - 0.5 + a - 0.5a > 0 \rightarrow 0.5(1+a) - K > 0 \rightarrow K < 0.5(1+a) \rightarrow K < 0.5(1+0.2)$,

da cui otteniamo che si ha stabilità asintotica per $k \in (-0.3, 0.6)$, che è contenuto nell'intervallo trovato al punto a.

Domanda 5

Lo schema si può trasformare nel seguente modo



facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{A(z)B(z)}{1 + A(z)((CB(z)) + (D)(z)B(z))} \ .$$

Domanda 6

a) Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{s+1}{s^2}] = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2}] \ ,$$

inoltre

$$\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}] = \frac{Tz}{(z-1)^2} \ , \mathcal{Z}[\frac{1}{s^3}] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \ ,$$

da cui

$$L(z) = \frac{2T(z-1) + T^2(z+1)}{2(z-1)^2} \ ,$$

la funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{2T(z-1) + T^2(z+1)}{2(z-1)^2 + 2T(z-1) + T^2(z+1)} \ .$$

b) L'equazione caratteristica è data da

$$q(z) = 2z^2 + z(-4 + 2T + T^2) + 2 - 2T + T^2 \ ,$$

le condizioni per la stabilità asintotica sono date da

$$1) 2 > |2 - 2T + T^2| \rightarrow -2 < 2 - 2T + T^2 < 2 \rightarrow T < 2 \ ,$$

2)$q(1) > 0 \rightarrow 2T^2 > 0$ sempre verificata percheè il tempo di campionamento è sempre positivo ,

$$3) q(-1) > 0 \rightarrow 8 - 4T > 0 \rightarrow T < 2 \ ,$$

quindi in conclusione il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $T \in (0, 2)$.

Parte B

2-

Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = \frac{(1-w)^2}{(0.5 + 1.5w)(1.8 + 0.2w)} = 10/9 \frac{(1-w)^2}{(1+3w)(1+w/9)} \ ,$$

abbiamo $P(0) = 10/9$, $\lim_{w \rightarrow +\infty} P(w) = 10/3$, inoltre il diagramma di Nyquist compie un giro in senso orario per pulsazioni da 0 all'infinito. Calcoliamo l'intersezione con l'asse reale. Consideriamo il polinomio $P(w) - \eta$, otteniamo

$$w^2(1 - 0.3\eta) + w(-2 - 2.8\eta) + (1 - 0.9\eta) = 0 \ ,$$

la possibile intersezione con l'asse reale avviene se

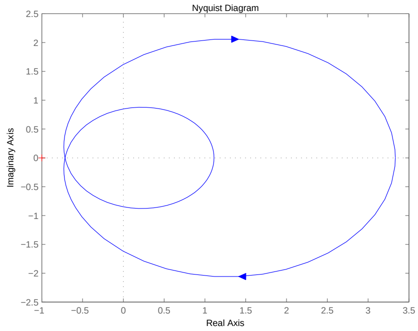
$$-2 - 2.8\eta = 0 \rightarrow \eta = -10/14 \ ,$$

sostituendo questo valore di η nel polinomio otteniamo

$$1.2143w^2 + 1.6429 = 0 \rightarrow w = \pm j1.1632 \ ,$$

quindi l'intersezione con l'asse reale avviene in $-10/14$, alla pulsazione (nel piano w) $\omega_w = 1.1632$ rad/s.

Il diagramma di Nyquist è dunque il seguente



il margine di ampiezza è pari a $M_a = \frac{1}{10/14} = 1.4$. La pulsazione di intersezione con l'asse reale nel piano z si ottiene mediante la relazione

$$\omega = \frac{2}{T}\arctan(\frac{T}{2}\alpha) \ ,$$

dove α è la pulsazione di intersezione nel piano w, da cui

$$\omega = \arctan 1.1632 = 0.8607 \ .$$

3-
Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{200}{200+s} \ ,$$

da cui

$$P_2(s) = P(s)H(s) = \frac{200}{(s+1)^3(s+200)} \ ,$$

per avere errore a regime a gradino pari ad 1/10, deve valere la condizione

$$1/10 = \frac{1}{1+P_2(0)C(0)} \to k = 9 \ ,$$

otteniamo

$$L(s) = kP_2(s) = 9\frac{1}{(s+1)^3(1+s/200)} \ ,$$

disegnamo il diagramma di Nyquist di $L(s)$, abbiamo

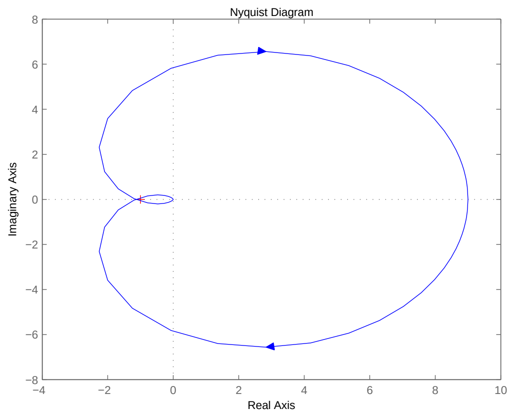
$$L(0) = 9 \ , \lim_{\omega\to\infty} L(j\omega) = 0 \ ,$$

inoltre il diagramma di Nyquist compie 1 giro in senso orario attorno all'origine, quando ω va da 0 a $+\infty$. Calcoliamo l'intersezione con l'asse reale, deve valere la condizione

$$3\arctan\omega + \arctan(\omega/200) = \pi \ ,$$

possiamo trascurare la seconda arcotangente, dato che l'argomento è diviso per 200, ottenendo $\omega_c \simeq \tan(\pi/3) = 1.7321$. Inoltre $L(1.7321j) \simeq -1.12$ che rappresenta il punto di intersezione con l'asse reale.

Il diagramma di Nyquist è il seguente



Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 3$, abbiamo

$$L(3j) = 0.2846e^{2.5210j} \ ,$$

vogliamo portare questo punto sull'asse reale a -0.5 per avere il margine di fase voluto. L'anticipo di fase è dato da $\phi = \pi - 2.5210 = 0.6205$, il guadagno di ampiezza da $M = 0.5/0.2846 = 1.7570$.

La condizione $M\cos(\phi) = 1.4294 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 0.5408$ e $\alpha = 0.2591$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 9\frac{1 + 0.5408s}{1 + 0.1401s} \ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri è dato da

$$C_d(z) = \frac{33.84z - 33.22}{z - 0.9311} \ .$$

Valutiamo la scelta del tempo di campionamento. La pulsazione critica adesso è pari a $\omega_0 = 3$, la condizione

$$T < \frac{\pi}{10\omega_0} = 0.1047 \ ,$$

è verificata, il tempo di campionamento scelto è dunque corretto.

3- a) Poniamo $S(z) = (z - 0.5)S'(z)$, $W(z) = (z - 0.5)W'(z)$, $R(z) = (z + 0.5)R'(z)$, la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{W'}{(z - 2)R' + S'} \ ,$$

per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 1 = \mathrm{Gr}[S'] + 1$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 0$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$r_0(z - 2) + s_0 = (z - 0.1) \ ,$$

da cui

$$r_0 = 1, \ s_0 = 1.9$$

il controllore cercato risulta dunque

$$W(z) = z - 0.5 \ , S(z) = 1.9(z - 0.5) \ , R(z) = z + 0.5 \ .$$

b) La funzione di traferimento tra disturbo e uscita è data da

$$T_{dy}(z) = \frac{P(z)}{1 + P(z)\frac{S(z)}{R(z)}} = \frac{R'(z)}{(z - 2)R'(z) + S'(z)} \ ,$$

essendo $D(z) = \frac{z}{z-1}$, occorre cancellare il polo in 1 del disturbo tramite $R'(z)$, poniamo dunque

$$R'(z) = R''(z)(z - 1) \ ,$$

l'equazione diofantea diventa quindi

$$R''(z)(z - 1)(z - 2) + S'(z) = A_O(z)(z - 0.1) \ ,$$

uguagliando il numero di equazioni al numero di incognite e ponendo il grado relatio del controllore pari a 0 otteniamo $\mathrm{Gr}[S'] = 1$, $\mathrm{Gr}[R''] = 0$, da cui

$$r_0(z - 1)(z - 2) + (s_1 z + s_0) = z(z - 0.1) \ ,$$

in cui abbiamo posto $A_0(z) = z$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ -3r_0 + s_1 = -0.1 \\ 2r_0 + s_0 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$r_0 = 1,\ s_1 = 2.9,\ s_0 = -2\ ,$$

il controllore è dato dunque da

$$W(z) = (z - 0.5)z,\ S(z) = (2.9z - 2)(z - 0.5),\ R(z) = (z + 0.5)(z - 1)\ .$$