Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 17 Settembre 2007 - Parte A

1- (5 p.) Dimostra che la trasformata zeta è un operatore lineare e usa questa propietà per calcolare la trasformata zeta della sequenza $\sin(\omega k)$ a partire dalla trasformata della progressione geometrica $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$.

2- (6 p.) a) Definisci la risposta all'impulso di un sistema a tempo discreto lineare e tempo invariante.
b) Dimostra che l'uscita del sistema è data dalla convoluzione discreta dell'ingresso e della risposta all'impulso.

3- (6 p) Determina la risposta all'impulso di un sistema che ha la seguente funzione di trasferimento e disegnane il grafico nel tempo:

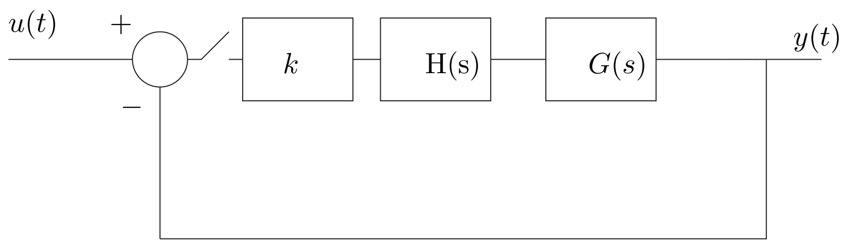
$$P(z) = \frac{1}{z^{10}(z - 0.2)} .$$

4- (8 p.) Nella seguente equazione alle differenze la successione $x(k)$ rappresenta il valore di un mutuo, k indica l'anno, α il tasso di interesse, M il valore iniziale del mutuo e C la quantità ripagata ogni anno

$$\begin{cases} x(k+1) = (1+\alpha)x(k) - C \\ x(0) = M . \end{cases}$$

a) Determina la trasformata zeta di $x(k)$.
b) Determina la sequenza $x(k)$.
c) Fissato $M = 900$ euro, $\alpha = 0.1$, $C = 100$ euro, qual'è il numero di anni necessari per la completa restituzione del mutuo?

5- (8 p.) Considera lo schema seguente



a) Determina la funzione di trasferimento tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$, assumendo $G(s) = \frac{1}{s^2-9}$.
b) Mostra che per nessun valore del tempo di campionamento $T > 0$ e del guadagno $K \in \mathbb{R}$ il sistema è asintoticamente stabile.

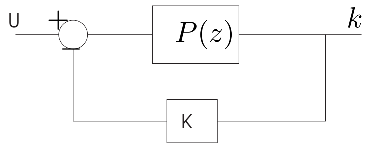
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 17 Settembre 2007 - Parte B

1- (7 p.) Illustra il metodo di discretizzazione basato sui metodi alle differenze in avanti e all'indietro, ricavando le espressioni delle trasformazioni e discuti la stabilità dei controllori ottenuti.

2- (9 p.) a) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s, determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale:

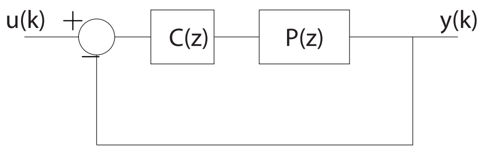
$$P(z) = \frac{1}{z^2(z-0.5)} .$$

b) Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato e determina il valore del guadagno k per cui il margine di ampiezza è pari a 2.



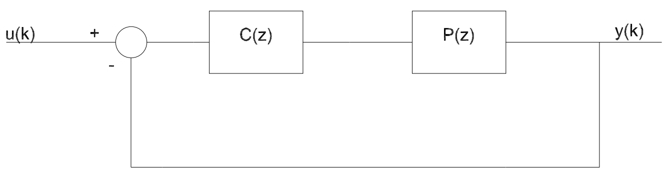
3- (9 p.) Considera il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e

$$P(z) = \frac{1}{z-0.5}.$$



Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{1}{(z-0.5)(z-2)} ,$$

in modo che la risposta al gradino unitario in ingresso sia di tipo deadbeat.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Si ottiene
$$zX(z) - zM = (1+\alpha)X(z) - C\frac{z}{z-1}$$
da cui
$$X(z) = \frac{z(M(z-1)-C)}{(z-1-\alpha)(z-1)} \ ,$$
antitrasformando
$$x(k) = \frac{C}{\alpha} + (M - \frac{C(1+\alpha)}{\alpha})(1+\alpha)^{k-1} \ ,$$
per trovare il numero di anni necessario alla restituzione del prestito, poniamo $x(k) = 0$, otteniamo
$$C + (\alpha M - C)(1+\alpha)^k = 0 \ ,$$
da cui
$$k = \frac{\log \frac{C}{C-\alpha M}}{\log(1+\alpha)} \ ,$$
sostituendo i valori indicati otteniamo $k = 24.16$, che arrotondato all'intero superiore da $k = 25$ anni.

Antitrasformando l'equazione alle differenze è data da
$$y(k) = u(k) + u(k-1) + u(k-2) + u(k-3) \ .$$

b) La risposta all'impulso si ottiene antrasformando direttamente $P(z)$ ed è data da
$$p(k) = \begin{cases} 1 \text{ se } k = 0, \ldots, 3 \\ 0 \text{ se } k > 3 \end{cases}$$

c) Il modo più semplice di fare il calcolo consiste nel sostituire $u(k)$ nell'equazione alle differenze, con condizioni iniziali nulle, si ottiene
$$y(0) = 1, \ y(1) = 2, \ y(2) = 3, \ y(3) = 4, \ y(k) = 4, \ \forall k \geq 4.$$

Domanda 4
L'equivalente discreto del sistema è dato da
$$L(z) = \mathcal{Z}[H(z)P(z)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2-9}] = \frac{1}{18}\frac{z(e^{-3T}+e^{3T}-2)+1-e^{-3T}-e^{3T}}{(z-e^{-3T})(z-e^{3T})} \ ,$$
l'equazione caratteristica è data da
$$1 + kL(z) = 0 \rightarrow z^2 + z(-e^{-3T} - e^{3T} + K(e^{-3T}+e^{3T}-2)) + 1 + K(e^{-3T} - e^{3T} - 2) \ ,$$
poniamo $\alpha = e^{-3T} + e^{3T}$, risulta $\alpha > 2$, dalla prima condizione abbiamo che
$$-1 < 1 + k(\alpha - 2) < 1 \rightarrow k < 0 \ ,$$
dalla seconda
$$1 - \alpha + k(\alpha-2) + 1 + k(\alpha-2) > 0 \rightarrow k < \alpha - 2 > 0 \ ,$$
quindi non vi è stabilità asinotica per nessun valore di k.

a) La funzione di trasferimento del sistema è data da
$$T(z) = \frac{z^2}{(k+1)z^2 + akz - k}$$

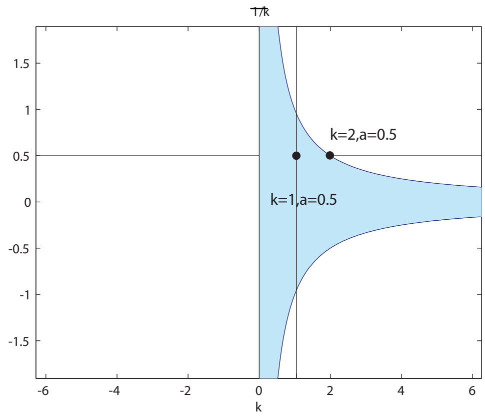
applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q = (k+1)z^2 + akz - k$, otteniamo le condizioni

1) $k + 1 > |k|$ sempre verificata

2) $q(1) > 0 \rightarrow a > -1/k$

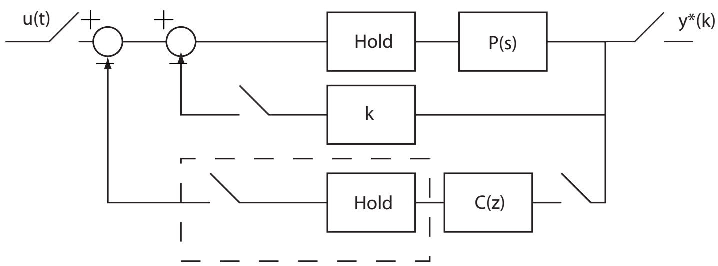
3) $q(-1) > 0 \rightarrow a < 1/k$

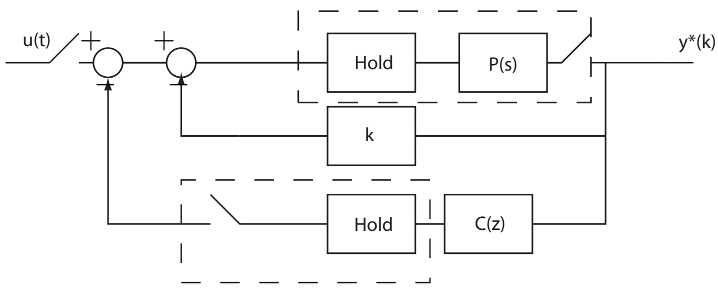
facendo l'intersezione di queste tre condizioni, troviamo il dominio rappresentato in blu in figura.



b) Il margine di ampiezza rappresenta il massimo fattore di riduzione o di aumento del guadagno di anello per cui la stabilità del sistema è conservata. In questo caso per $a = 0.5$, il sistema è stabile quando $k \in (0, 2)$. Quindi se $k = 1$ il massimo fattore di incremento del guadagno che conserva la stabilità è 2, che rappresenta anche il margine di ampiezza.

Domanda 5





dove è stato usato il fatto che è possibile scambiare un campionatore con il blocco che contiene il guadagno k, si sarebbe anche potuto portare il punto di prelevamento del segnale a monte di $P(s)H(s)$, sdoppiando questi blocchi.

facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati e osservando che $\mathcal{Z}[H(s)] = 1$, otteniamo

$$T(z) = \frac{(PH)(z)}{1 + (C(z) + k)(PH)(z)},$$

inoltre $\mathcal{Z}[P(s)H(z)] = \frac{1-e^{-aT}}{a(z-e^{-aT})}$, da cui

$$T(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{a(kz+1)(z - e^{-aT}) + (1 - e^{-aT})z} \,.$$

Parte B

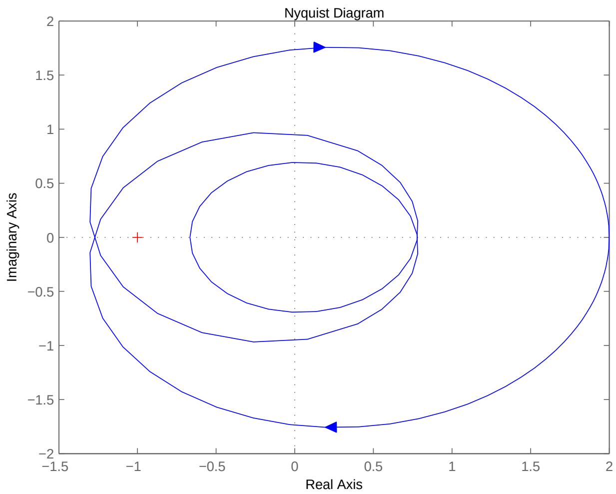
2- Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = \frac{(1-w)^3}{(1+w)^2(0.5+1.5w)} ,$$

si ha che $P(0) = 2$, $\lim_{j\omega_w \to \infty} P(j\omega_w) = 2/3$, inoltre il diagramma di Nyquist compie 1 giro e 1/2 in senso antiorario.

Consideriamo l'equazione $\eta + P(w) = 0$, otteniamo $w^3(1.5\eta-1)+w^2(3.5\eta+3)+w(2.5\eta-3)+0.5\eta+1$, annullando l'ultima riga della tabella di Routh si ottiene l'equazione $8\eta^2 - 4\eta - 8 = 0$ che ha come soluzioni $\eta = -0.78, 1.28$ per cui le intersezioni con l'asse reale sono in -1.28 e 0.78. Il sistema è stabile per $k \in [-0.5, 0.7808]$.

Il diagramma di Nyquist è il seguente



per avere il margine di ampiezza pari a 4 dobbiamo avere l'intersezione con il diagramma di Nyquist in -0.5, occorre quindi scegliere $k = 0.5/(1/28) = 0.3906$.

3-

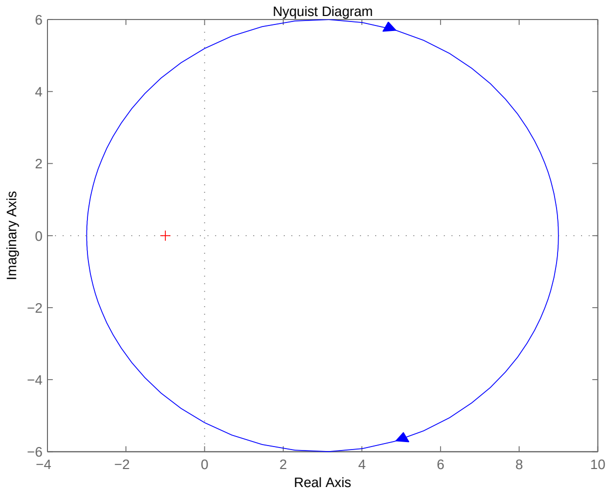
Passando al piano w otteniamo

$$P_w(w) = \frac{2(1-w)}{1+3w} ,$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che

$$\lim_{w \to 0} P_w(w) C_w(w) = 9 \to k = 9/2 .$$

Il diagramma di Nyquist del sistema moltiplicato per il guadagno k è il seguente



applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 10$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P_w(10j)) = 0.1330, \ M = 2|P_w(10j)| = 6.0266$$

la condizione $M\cos(\phi) = 5.97 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 3.79$ e $\alpha = 0.1639$, il controllore continuo risulta dunque

$$C_w(w) = 9/2\frac{1 + 0.6224w}{1 + 3.798w} \ .$$

il controllore discreto, ottenuto con la trasformata di Tustin inversa è dato da

$$C(z) = \frac{1.522z + 0.3542}{z - 0.5831} \ .$$

4- Per avere una risposta di tipo deadbeat poniamo mettiamo un polo in 1 nel controllore. Poniamo $S(z) = (z - 0.5)S'(z)$, $R(z) = (z - 1)R'(z)$, la funzione di trasferimento tra errore ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{(z-1)(z-2)R'(z)}{(z-1)(z-2)R'(z) + S'(z)} \ ,$$

per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 3$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 2 = \mathrm{Gr}[S'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R] = 1$. L'equazione diofantea diventa

$$(r_1 z + r_0)(z-1)(z-2) + (s_1 z + s_0) = z^3 \ , \ ,$$

otteniamo il sistema

$$r_1 = 1; r_1 - 3r_0 = 0; -3r_0 + 2r_1 + s_1 = 0; 2r_0 + s_0 = 0;$$

da cui

$$r_1 = 1, \ r_0 = 3, \ s_1 = 7, \ s_0 = -6 \ .$$

quindi

$$S(z) = (z - 0.5)(7z - 6)z^3, \ R(z) = (z-1)(z+3) \ .$$