Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 21 Gennaio 2008 - Parte A

1- (5 p.) Dimostra la proprietà della trasformata zeta di una successione ritardata

$$\mathcal{Z}[x(k-n)1(k-n)] = z^{-n}\mathcal{Z}[x(k)1(k)] ,$$

usa questa propietà per calcolare la trasformata zeta del segnale

$$x(k) = \begin{cases} 1 \text{ se } 10 \leq k \leq 20 \\ 0 \text{ altrimenti } . \end{cases}$$

2- (6 p.) Presenta e dimostra la formula per il calcolo dell'equivalente discreto di un sistema a tempo continuo preceduto dal filtro di hold.

3- (6 p) Un sistema a tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{Mz}{z^2 + az + b} ,$$

in cui M,a,b sono parametri da individuare. In ingresso al sistema viene posto il segnale $u(k) = 0$ se $k < 0$ oppure $k \geq 3$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$, $u(2) = 1$. L'uscita del sistema, nulla per $k < 0$, viene misurata per $0 \leq k \leq 3$ ed è data da $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $y(3) = 1$.

a) Determina l'equazione alle differenze del sistema.

b) Determina i parametri M, a, b.

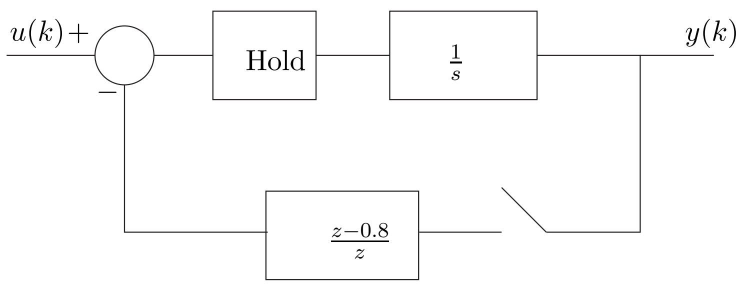
c) Determina $y(4)$, $y(5)$.

4- (8 p.) La temperatura di un boccale di birra soddisfa la seguente equazione alle differenze

$$t(k+1) = t(k) + 0.05(T_s - t(k)) ,$$

dove $t(k)$ indica la temperatura del boccale al minuto k-esimo e T_s è la temperatura della stanza in cui è posto. Sapendo che $t(0) = 10°C$ e che $t(1) = 10.5°C$, trova la temperatura della stanza.

5- (8 p.) Considera lo schema seguente



Determina il tempo di campionamento T massimo per cui il sistema è asintoticamente stabile.

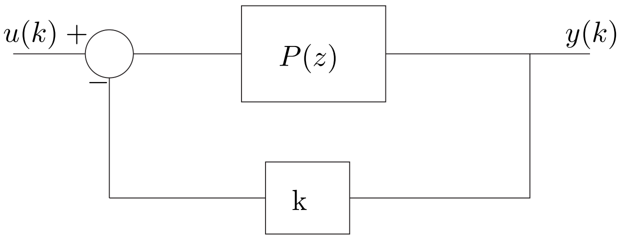
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 21 Gennaio 2008 - Parte B

1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi a tempo discreto.

2- (9 p.) a) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s, determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale:

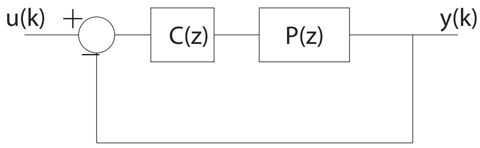
$$P(z) = \frac{1}{z^2(z-2)} .$$

b) Considera il sistema collegato in retroazione con guadagno k e tramine il teorema di Nyquist mostra che il sistema è instabile $\forall k \in \mathbb{R}$.



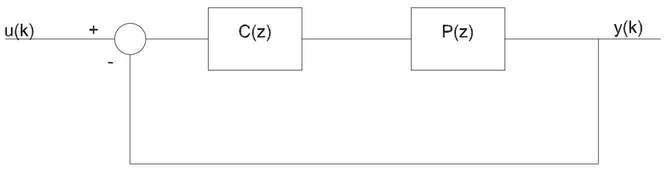
3- (9 p.) Considera il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e

$$P(z) = \frac{1}{z^2}.$$



Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a $1/10$ e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w(w) = k\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$ e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{1}{(z-0.5)} ,$$

in modo che la risposta al segnale di ingresso $u(k) = \sin(\omega k)$ sia di tipo deadbeat (cioè che il segnale errore si annulli in un numero finito di passi).

Per prima cosa calcola la funzione di trasferimento tra l'ingresso e il segnale errore. Poi vedi che struttura deve avere il controllore per soddisfare alla specifica.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
L'equazione alle differenze è data da

$$y(k) + ay(k-1) + by(k-2) = Mu(k-1) \ ,$$

sostituendo i valori indicati per $k = 1$ otteniamo

$$y(1) + ay(0) + by(-1) = Mu(0) \rightarrow M = 1$$

per $k = 2$ e $k = 3$

$$\begin{array}{c} y(2) + ay(1) + by(0) = ku(1) \rightarrow a = -2 \\ y(3) + ay(2) + by(1) = ku(2) \rightarrow b = 4 \ . \end{array}$$

I valori di $y(4)$ e $y(5)$ sono dati quindi da

$$\begin{array}{c} y(4) = 2y(3) - 4y(2) + u(3) = -6 \\ y(5) = 2y(4) - 4y(3) + u(4) = -16 \ . \end{array}$$

Domanda 4
Passando alla trasformata zeta, l'equazione alle differenze diventa

$$zT(z) - zt(0) = T(z) + 0.05(T_s \frac{z}{z-1} - T(z)) \ , \rightarrow T(z) = \frac{10z(z-1) + T_s 0.05z}{(z-1)(z-0.95)} \ ,$$

dove si è usato il fatto che $t(0) = 10$. Antitrasformiamo tramite l'integrale di inversione, per risolvere il problema è sufficiente determinare $t(1)$:

$$t(1) = \sum \text{Res}(T(z)) = s + 9.5 - 0.95s$$

sappiamo che $t(1) = 10.5$, uguagliando questo valore con l'espressione precedente otteniamo

$$10.5 = s + 9.5 - 0.95s \rightarrow T_s = 20 \ ,$$

la temperatura della stanza è quindi di $20°C$.

Domanda 5
La trasformata zeta del sistema a tempo continuo preceduto dal filtro di hold è data da

$$\frac{1-z}{z} \mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}] = \frac{T}{z-1} \ ,$$

la funzione di trasferimento di anello è data da

$$L(z) = \frac{T(z-0.8)}{z(z-1)} \ ,$$

l'equazione caratteristica da

$$z^2 + z(T-1) - T0.8 = 0$$

delle condizioni per la stabilità abbiamo che
1) $1 > 0.8T \rightarrow T < 1.25$
2) $0.2T > 0$ sempre verificata ($T > 0$ sempre)
3) $1.8T < 2 \rightarrow T < 10/9$
da cui abbiamo che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $T < 10/9$.
Parte B

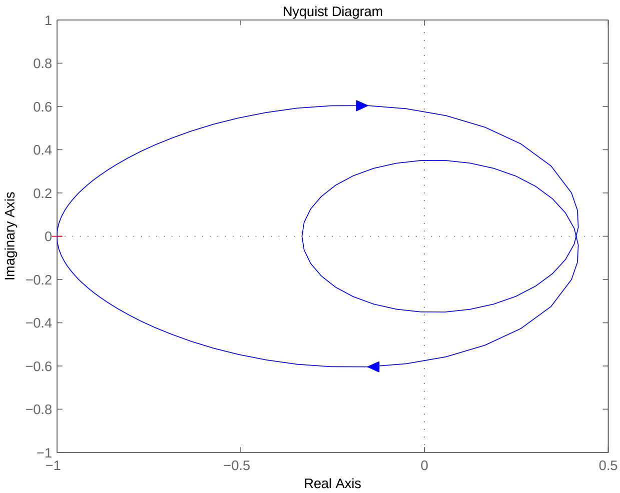
2- Passando al piano w, facendo la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, otteniamo

$$P_w(w) = \frac{-(1-w)^3}{(1+w)(1-3w)} \ ,$$

con $P(0) = -1$, $\lim_{j\omega_w \to \infty} P(j\omega_w) = -1/3$, inoltre il diagramma di Nyquist compie 1 giroin senso antiorario.

Consideriamo l'equazione $P(w) - \eta = 0$, otteniamo $w^3(1+3\eta) + w^2(-3+5\eta) + w(3+\eta) - \eta - 1$, annullando l'ultima riga della tabella di Routh si ottiene l'equazione $\eta^2 + 2\eta - 1 = 0$ che ha come soluzioni $\eta = -1 \pm \sqrt{2}$. Sostituendo queste soluzioni nell'ultima riga della tabella, si trova che solo la radice $\eta = -1 + \sqrt{2} = 0.414$ corrisponde a radici immaginarie. L'intersezione con l'asse reale è dunque in 0.414.

Il diagramma di Nyquist è il seguente.



Per avere stabilità per un valore del guadagno $k \in \mathbb{R}$, il punto critico $-1/k$ dovrebbe essere circondato una volta in senso antiorario (il sistema ha un polo instabile), questo non avviene per nessun valore di k.

3-

Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = 1/3 \frac{((1-w)^3}{(1+w)^3} \ .$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che

$$\lim_{w \to 0} P_w(w) C_w(w) = 9 \to k = 9 \ .$$

Il diagramma di Nyquist del sistema moltiplicato per il guadagno k, per ω_w che va da 0 a $+\infty$. è un cerchio centrato nell'origine di ampiezza 9 percorso due volte in senso antiorario. Infatti $|P(j\omega_w)| = 9$, $\forall \omega_w$ e $\arg(P(j\omega_w)) = 4 \arctan \omega$. La prima intersezione con l'asse reale si ha per $4 \arctan \omega_w = -\pi$, quindi per $\omega_w = \tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 0.5$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P_w(j)) = 1.287, \ M = 2 \cdot 9 \cdot |P_w(j)| = 18$$

la condizione $M \cos(\phi) = 5.04 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 36.9167$ e $\alpha = 0.0127$, il controllore continuo risulta dunque

$$C_w(w) = 9 \frac{1 + 0.4676 w}{1 + 36.92 w} \ .$$

il controllore discreto, ottenuto con la trasformata di Tustin inversa è dato da

$$C(z) = 9\frac{0.3484z + 0.1264}{z - 0.9473} \ .$$

4- La funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{1}{1 + P(z)C(z)} \ ,$$

poniamo $C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$ e cancelliamo i poli stabili del sistema scrivendo $S(z) = (z - 0.5)S'(z)$. Da cui

$$T(z) = \frac{R(z)}{R(z) + S'(z)} \ ,$$

la trasformata del segnale in ingresso è data da

$$U(z) = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \ ,$$

e quella del segnale errore

$$E(z) = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \frac{R(z)}{R(z) + S'(z)} \ ,$$

dobbiamo quindi porre $R(z) = (z^2 - 2z\cos\omega + 1)R'(z)$ per cancellare i poli dell'ingresso e per avere una risposta di tipo deadbeat poniamo $(z^2 - 2z\cos\omega + 1)R'(z) + S'(z) = z^l$. Il numero di incognite è dato da $\text{Gr}[R\prime] + \text{Gr}[S'] + 2$, il numero di equazioni da $\text{Gr}[R'] + 3$, otteniamo quindi $\text{Gr}[S'] = 1$. Dalla condizione di grado relativo nullo per il controllore otteniamo $\text{Gr}[R'] = 0$. L'equazione diofantea è data quindi da

$$r_0(z^2 - 2z\cos\omega + 1) + s_1 z + s_0 = z^l \ ,$$

risolvendo otteniamo

$$l = 2, \ r_0 = 1, \ s_1 = 2\cos\omega, \ s_0 = -1 \ ,$$

da cui

$$C(z) = \frac{(2\cos\omega z - 1)(z - 0.5)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \ .$$