Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 23 Novembre 2007 - Parte A

1- (5 p.) a) Dimostra che se $x(k) = 0$, $y(k) = 0$, $\forall k < 0$ allora

$$\mathcal{Z}[x(k)]\mathcal{Z}[y(k)] = \mathcal{Z}[x(k) \star y(k)] \ .$$

b) Usa la formula precedente per calcolare la trasformata zeta di

$$x(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} l \cdot a^{-(k-l)} 1(k-l) \ .$$

2- (5 p.) Presenta il metodo della tabella di Jury per l'analisi della stabilità dei sistemi a tempo discreto.

3- (7 p.) a- Determina la risposta all'impulso di un sistema che ha la seguente funzione di trasferimento e disegnane il grafico nel tempo

$$P(z) = \frac{1}{z^2 - 0.6z + 0.25} \ .$$

b- Posto in ingresso al sistema il segnale $u(k) = \sin(k/10)$, determina l'uscita a regime.

4- (8 p.) Secondo il modello di Malthus la crescita della popolazione di una città è regolata dalla seguente legge

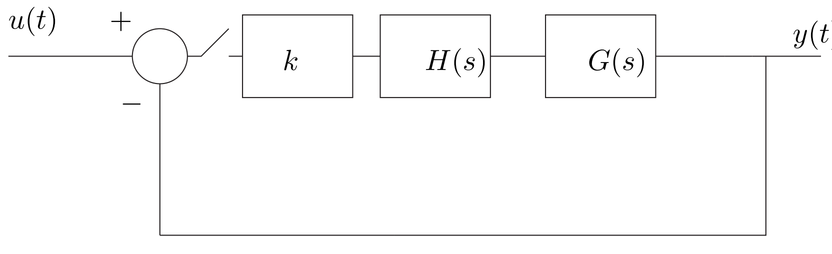
$$\begin{array}{l} x(k+1) = ax(k) \\ x(0) = x_0 \ . \end{array}$$

dove $x(k)$ rappresenta la popolazione nell'anno k, $a > 0$ rappresenta il tasso di crescita x_0 rappresenta la popolazione nell'anno 0.

a) Sapendo che la città di Parma aveva una popolazione di 77.000 abitanti nel 1901 e ha invece 177.000 abitanti nel 2007, determina il tasso di crescita a e il parametro x_0.

b) Determina la popolazione che la città di Parma avrebbe nell'anno 2050 secondo il modello di Malthus.

5- (8 p.) Considera lo schema seguente, in cui $H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$ è il filtro di hold e il tempo di campionamento è pari a $T = 1s$.



a) Determina la funzione di trasferimento tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$, assumendo $G(s) = \frac{s}{(s+a)(s+2a)}$.

b) Posto $k = 1$, determina un valore del parametro $a > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

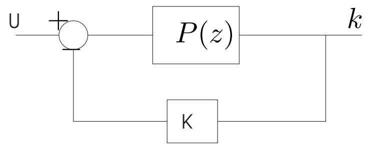
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 23 Novembre 2007 - Parte B

1- (7 p.) 1- Illustra i metodi di discretizzazione per invarianza all'impulso, al gradino e alla rampa, dimostrando le formule presentate.

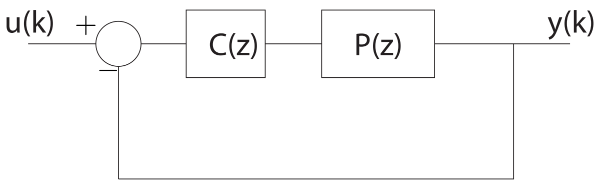
2- (9 p.) a) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale:

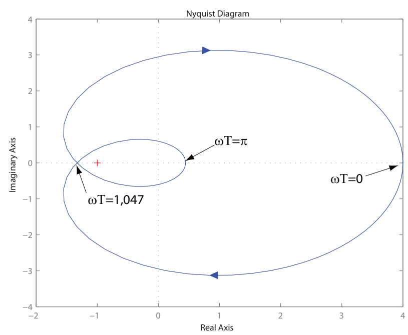
$$P(z) = \frac{z+3}{(z-0.5)^2} .$$

b) Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato e determina il valore del guadagno k per cui il margine di ampiezza è pari a 2.



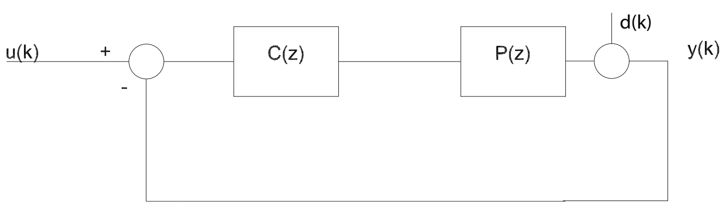
3- (9 p.) Considera il sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $P(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2}$, con tempo di campionamento pari a $T = 2$. Lo schema di controllo e il diagramma di Nyquist di $P(z)$ sono i seguenti.





Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\tau\alpha w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{1}{z(z-0.5)} ,$$

in modo che la risposta al gradino unitario sia di tipo deadbeat e i disturbi del tipo $d(t) = \sin(0.2k)$ siano asintoticamente eliminati dall'uscita.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Antitrasformiamo con la formula di inversione. Abbiamo che

$$p(k) = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^{k-1}}{(z-0.3-0.4j)(z-0.3+0.4j)}) ,$$

per $k = 0$ $p(0) = 0$ perchè il grado relativo della funzione è pari a 3. Per $k \geq 1$ possiamo usare l'espressione

$$\begin{aligned} p(k) &= 2\mathrm{Re}\{\mathrm{Res}(\frac{z^{k-1}}{(z-0.3-0.4j)(z-0.3+0.4j)}, 0.3+0.4))\} = \\ &= 2\mathrm{Re}\{\frac{(0.3+0.4j)^{k-1}}{0.8j}\} = 2.50.5^{k-1}\mathrm{Re}\{-je^{j\arctan(4/3)(k-1)}\} , \end{aligned}$$

sviluppando l'esponenziale con la formula di Eulero, otteniamo

$$p(k) = 2.5 \cdot 0.5^{k-1} \sin(\arctan(4/3)(k-1)) .$$

b) Usiamo il teorema di analisi armonica, la funzione di risposta armonica alla pulsazione richiesta è data da

$$P(e^{j0.1}) = 1.5072 - 0.3304j = 1.5430e^{-0.2158j} ,$$

l'uscita a regime è data quindi da $y_\infty = 1.5340 \sin(0.1k - 0.2158)$.

Domanda 4
Si ottiene

$$zX(z) - zx_0 = aX(z)$$

da cui

$$X(z) = \frac{zx_0}{z-a} ,$$

antitrasformando

$$x(k) = x_0 a^k .$$

Per trovare i parametri x_0 e a nel caso di Parma, sostituiamo i dati conosciuti in questa equazione

$$\begin{aligned} x_0 a^{1901} &= 77.000 , \\ x_0 a^{2007} &= 177.000 \end{aligned}$$

facendo il rapporto delle due equazioni otteniamo

$$a^{106} = 177/77 \rightarrow a = (177/77)^{1/106} = 1.007883 ,$$

risostituendo nella prima otteniamo $x_0 = 0.025332$, che rappresenterebbe la popolazione di Parma nell'anno 0, il modello in questo caso è chiaramente sballato. b) Applicando il modello abbiamo che $x(2050) = 248090$ abitanti.

Domanda 5
L'equivalente discreto della serie del filtro di hold e di $G(s)$ è data da

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(z)P(z)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{(s+a)(s+2a)}] = \frac{e^{-aT}(1-e^{-aT})(z-1)}{a(z-e^{-aT})(z-e^{-2at})},$$

l'equazione caratteristica è data da

$$1 + kL(z) = 0 \rightarrow a(z-e^{-aT})(z-e^{-2aT}) + k(z-1)(e^{-aT} - e^{-2aT}) = 0 ,$$

sostituendo $k = 1$, otteniamo

$$q(z) = a(z-e^{-aT})(z-e^{-2aT})+(z-1)e^{-aT}(1-e^{-aT}) = 0 \to q(z) = az^2+z(-ae^{-2aT}-ae^{-aT}+e^{-aT}-e^{-2aT}+ae^{-}$$

applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q(z)$, otteniamo

1) $a > |e^{-aT}(-1+e^{-aT}+ae^{-2aT}|$

2) $a(1-e^{-aT})(1-e^{-2aT}) > 0$ sempre verificata

3) $a(1+e^{-aT})(1+e^{-2aT})+2e^{-aT}(-1+e^{-aT}) > 0$,

si vede che per $a \to \infty$ la prima e la terza condizione sono verificate, basta quindi scegliere per a un valore sufficientemente grande. Ad esempio se $T = 1$, per $a = 10$ risultano soddisfatte.

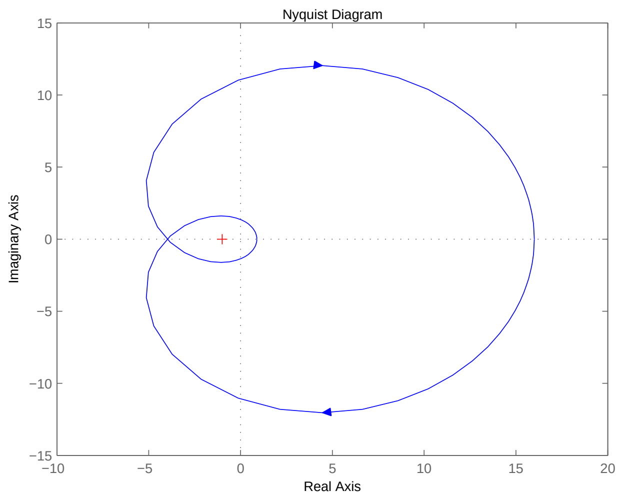
Parte B

2- Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \to \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = \frac{16(1-w)(1-0.5w)}{(1+3w)^2} \ ,$$

si ha che $P(0) = 16$, $\lim_{j\omega_w \to \infty} P(j\omega_w) = 8/9$. Inoltre $\arg(P(j\omega_w)) = -\arctan(\omega_w) - \arctan(0.5\omega_w) - 2\arctan(3\omega_w)$, per cui il diagramma di Nyquist compie 1 giro in senso antiorario. Per trovare le intersezioni con l'asse reale consideriamo l'equazione $\eta - P(w) = 0$, otteniamo $w^2(9\eta-8)+w(6\eta+24)+\eta-16 = 0$, per avere radici puramente immaginare occorre annullare il termine di grado 1, otteniamo quindi $\eta = -4$ che corrisponde all'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale negativo. La pulsazione corrispondente si trova sostituendo il valore di η nell'equazione: $-44\eta^2 - 20 = 0$ che ha come soluzioni $\eta = \pm j0.6742$, la pulsazione di intersezione è dunque $\omega_w = 0.6742$.

Il diagramma di Nyquist è dunque il seguente.



Il sistema è stabile per i guadagni $k \in \mathbb{R}$ per cui il punto critico $-1/k$ non viene nè toccato nè circondato dal diagramma di Nyquist. Questo corrisponde ad avere $-1/k > 16$ oppure $-1/k < -4$, il sistema è dunque stabile per $k \in (-1/16, 1/4)$. Per avere il margine di ampiezza pari a 2 dobbiamo avere l'intersezione con il diagramma di Nyquist in -0.5, occorre quindi scegliere $k = 0.5/(4) = 0.125$.

3-

Passando al piano w otteniamo

$$P_w(w) = \frac{4(1-w)^2}{(1+3w)^2} \ ,$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che

$$\lim_{w \to 0} P_w(w)C_w(w) = 9 \to k = 9/4 \ .$$

Applichiamo le formule di inversione partendo da un punto del diagramma di Nyquist contenuto nel terzo quadrante, in modo tale che la rete ritardatrice possa fornire il ritardo di fase necessario per portarlo sull'asse reale, la pulsazione sul piano z deve quindi essere inferiore a $\omega_c = 1.047/2$ rad/s, come riportato nel grafico (ricordare che $T = 2$), che nel piano w corrisponde a $\omega_{wc} = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega_c T}{2}) = 0.5772$. Prendiamo ad esempio $\omega_{w0} = 0.4$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P_w(0.4j)) = 0.6285, \; M = 2|P_w(0.4j)| = 8.5574 \; ,$$

la condizione $M\cos(\phi) = 6.9223 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 32.9495$ e $\alpha = 0.0893$, il controllore continuo risulta dunque

$$C_w(w) = 9/4 \frac{1 + 2.943w}{1 + 32.95w} \; .$$

il controllore discreto, ottenuto con la trasformata di Tustin inversa è dato da

$$C(z) = \frac{0.588z - 0.2897}{z - 0.9411} \; .$$

4-

Il controllore è dato da $C(z) = S(z)/R(z)$ e l'impianto da $P(z) = B(z)/A(z)$. La funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita è data da

$$T_{dy} = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} = \frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)} \; .$$

La trasformata zeta del disturbo $d(k) = \sin(ak)$ è data da $D(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$, per eliminare il contributo a regime del disturbo occorre dunque cancellare la coppia di poli sul cerchio unitario di $D(z)$ ponendo $R(z) = R'(z)(z^2 - 2z\cos a + 1)$, per avere risposta di tipo deadbeat al gradino occorre inoltre inserire in $R(z)$ un polo in $z = 1$, otteniamo dunque $R(z) = R''(z)(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)$. Inoltre $S(z) = z(z - 0.5)S'(z)$ per cancellare i poli stabili del sistema. L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)R''(z) + S'(z) = z^l \; .$$

Per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R''] + 4$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R''] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 2$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R''] + 3 = \mathrm{Gr}[S'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R''] = 1$. L'equazione diofantea diventa

$$(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)(r_1 z + r_0) + (s_2 z^2 + s_1 z + s_0) = z^4 \; .$$

uguagliando i termini di grado corrispondente otteniamo il sistema

$$\begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_0 - 2\cos a r_1 - r_1 = 0 \\ -r_0 - 2\cos a(r_0 - r_1) + r_1 + s_2 = 0 \\ 2\cos a r_0 + (r_0 - r_1) + s_1 = 0 \\ -r_0 + s_0 = 0 \end{array}$$

da cui otteniamo

$$r_1 = 1, \; r_0 = (1 + 2\cos a), \; s_2 = -(2\cos a + 1)2\cos a, \; s_1 = -2\cos a(2 + 2\cos a), \; s_0 = 1 + 2\cos a \; .$$

quindi, sostituendo $a = 0.2$

$$S(z) = z(z - 0.5)(5.802z^2 - 7.7624z + 2.9601), \; R(z) = (z^2 - z1.9601 + 1)(z-1)(z + 2.9601) \; .$$