Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 5 Settembre 2005

Parte A-I - 30 minuti

Illustra le seguenti due tecniche per trovare l'antitrasformata zeta di una funzione $X(z)$

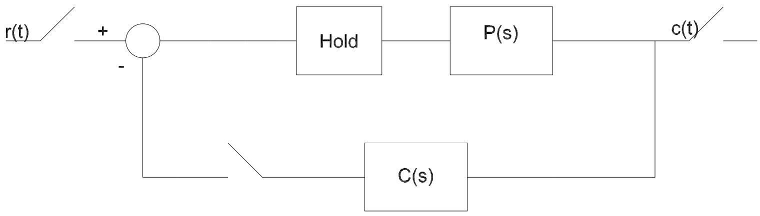
- scomposizione in fratti semplici
- formula di inversione

dimostra inoltre la formula su cui è basata la seconda tecnica.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 5 Settembre 2005

Parte A-II - 60 minuti

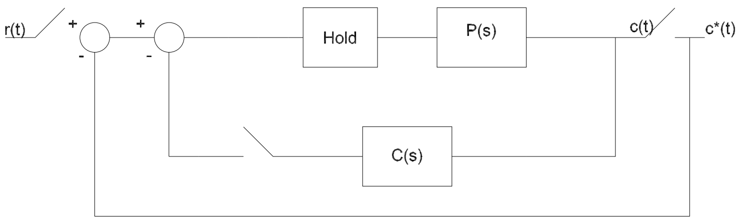
1- Considera il seguente sistema



con

$$P(s) = \frac{1}{s+3}, \; C(s) = k\frac{s+3}{s+10}.$$

(a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema, assumendo un tempo di campionamento $T = 1s$.
(b) Calcola l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema dato è asintoticamente stabile.
Considera poi il sistema seguente



(c) Calcola la funzione di trasferimento del sistema, servendoti di quella calcolata precedentemente, sempre assumendo $T = 1s$.
(d) Calcola l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema dato è asintoticamente stabile

2- Considera la seguente equazione alle differenze

$$\begin{aligned} &x(k+1) = y(k) + 2x(k) \\ &y(k+1) = 2y(k) \\ &x(0) = 0, \; y(0) = 1 \end{aligned}$$

(a) Trasforma le due equazioni alle differenze in equazioni algebriche nel dominio delle trasformate zeta.
(b) Risolvi il sistema nel dominio delle trasformate z.
(c) Antitrasforma il risultato ottenuto, trovando $x(k)$ e $y(k)$.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 5 Settembre 2005

Parte B-I - 20 minuti

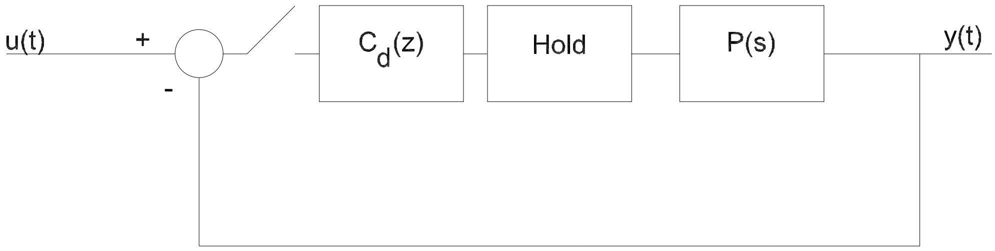
Illustra i metodi delle differenze in avanti e all'indietro per la discretizzazione dei controllori continui, in particolare per ciascuno dei due metodi

- ricava la regola di trasformazione
- discuti la stabilità dei controllori digitali ottenuti.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 5 Settembre 2005

Parte B-II - 40 minuti

Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{(10-s)}{s}.$$

Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete ritardatrice

$$C(s) = k\frac{1+\tau\alpha s}{1+\tau s}$$

in modo da soddisfare le specifiche

- errore a regime in risposta alla rampa unitaria pari a 0.1
- margine di ampiezza $M = 4$

nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

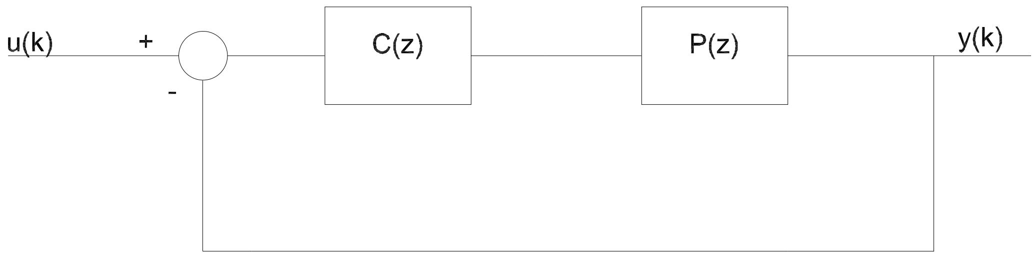
e considerare un tempo di campionamento $T = 0.2s$.

La discretizzazione va effettuata per mezzo della corrispondenza poli-zeri. Discutere se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 5 Settembre 2005

Parte B-III - 30 minuti

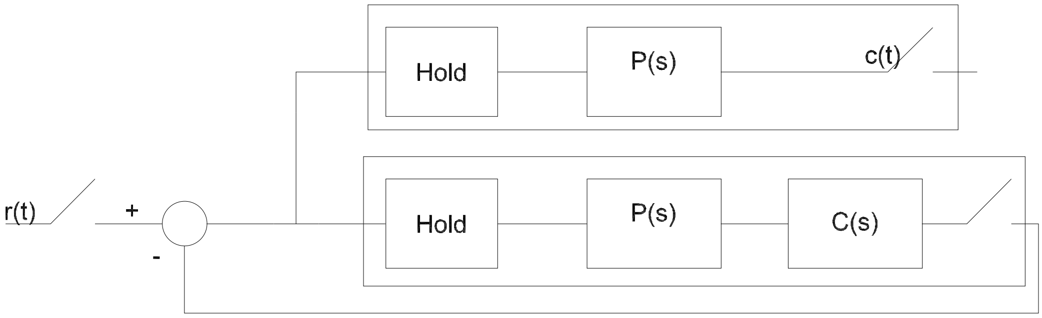
Progetta un controllore di tipo deadbeat $C(z)$ per il seguente sistema, in modo che questo abbia errore nullo in un tempo finito in risposta al gradino



Con

$$P(z) = \frac{(z+0.1)(z+2)}{(z-2)(z-0.2)(z-0.1)} \ .$$

Soluzione:
Parte A-II
1a- Applicando le regole di trasformazione, lo schema presentato è equivalente al seguente



in cui

$$HP(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{(s+3)s}] = \frac{1}{3}\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}$$

e

$$HPC(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{(s+10)s}] = \frac{1}{10}\frac{1-e^{-10T}}{z-e^{-10T}}$$

La funzione di trasferimento complessiva risulta dunque

$$L(z) = \frac{HP(z)}{1+KHPC(z)} = \frac{10(1-e^{-3T})(z-e^{-10T})}{(10(z-e^{-10T})+K(1-e^{-10T}))3(z-e^{-3T})} .$$

b- L'equazione caratteristica $c_1(z)$ è data dal numeratore di $1 + K \cdot HPC(z)$:

$$c_1(z) = 10(z-e^{-10T}) + K(1-e^{-10T})$$

ed ha come soluzione

$$z = e^{-10T}(0.1K+1) - 0.1K$$

da cui $|z| < 1$ se e solo se

$$-1 < e^{-10T} * (K+1) - K < 1$$

da cui, per $T = 1s$,

$$k \in (-10, 10.0009)$$

c- Il secondo schema è ottenuto collegando in retroazione unitaria l'ingresso e l'uscita del primo. La funzione di trasferimento dello schema considerato è quindi data da

$$L_2(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{10(1-e^{-3T})(z-e^{-10T})}{10(1-e^{-3T})(z-e^{-10T}) + (3(10(z-e^{-10T})+K(1-e^{-10T})))(z-e^{-3T})}$$

d- L'equazione caratteristica c_2 è data dal numeratore di $c_2(z) = 1 + L(z)$, da cui

$$c_2(z) = (10(1-e^{-3T})(z-e^{-10T}) + (3(10(z-e^{-10T}) + K(1-e^{-10T}))(z-e^{-3T}),$$

sostituendo $T = 1s$, otteniamo

$$c_2(z) = z^2 + (0.2669 + 0.1000\,k)\,z - 0.00001212 - 0.004979\,k$$

dalle condizioni di partenza della tabella di Jury abbiamo

$$\begin{array}{l} 1 > |0.00001212 - 0.004079\,k| \rightarrow k \in (-200.87, 200.86) \\ c_2(1) > 0 \rightarrow k > -13.333 \\ c_2(-1) > 0 \rightarrow k < 6.983 \end{array}$$

da cui il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$k \in (-13.333, 6.983)\ .$$

2- a- Le equazioni trasformate risultano

$$\begin{array}{l} zX(z) - zx(0) = Y(z) + 2X(z) \\ zY(z) - zy(0) = 2Y(z) \end{array}$$

b- La soluzione è

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)^2}\ , Y(z) = \frac{z}{z-2}$$

c- Antitrasformando, otteniamo

$$x(k) = k2^{k-1},\ y(k) = 2^k\ .$$

Parte B-II

Il ritardo finito è approssimato da

$$H(s) = \frac{10}{10+s};$$

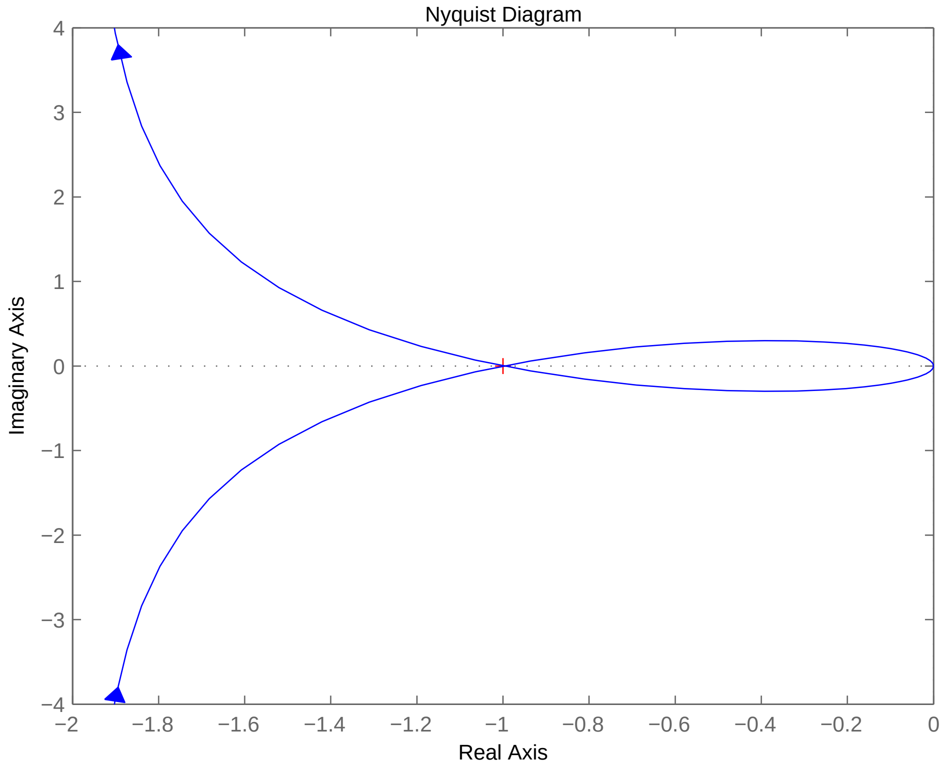
il guadagno ad anello aperto del sistema, senza la rete correttrice, è

$$L(s) = H(s)P(s) = \frac{10(10-s)}{s(s+10)}$$

dalla specifica sull'errore alla rampa abbiamo che $0.1 = \frac{1}{K_v}$, da cui $K_v = 10$ quindi

$$KsH(0)P(0) = 10 \rightarrow k = 1\ ,$$

tracciamo il diagramma di Nyquist di $L_2(s) = kL(s)$,



l'intersezione negativa con l'asse reale si può ottenere dalla tabella di Routh per l'equazione $x + L_2(s) = 0$, da cui

$$xs(10 + s) + 10(10 - s) = 0 ,$$

annullare la seconda riga della tabella di Routh equivale ad imporre $10x - 10 = 0$, da cui $x = 1$, che rappresenta il valore assoluto dell'intersezione negativa con l'asse reale. L'equazione diventa così

$$s^2 + 100 = 0,$$

da cui $\omega_c = 10$rad/s. Per progettare la rete ritardatrice prendiamo $\omega_0 < \omega_c$, ad esempio $\omega_0 = 5$, da cui

$$\phi = 180 + \arg(P(5j)) = 0.6435,\ M = 4|P(3j)| = 8 ,$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \to 0.8000 > 0.125$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 2.400$ e $\alpha = 0.0938$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = \frac{1 + 0.225s}{1 + 2,4s} .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri divanta

$$C_d(z) = \frac{0.1358z - 0.05582)}{z - 0.92} .$$

Per quanto riguarda la correttezza del tempo di campionamento, abbiamo che il lo zero o polo piu' veloce del controllore è in -4.444, da cui deriva la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{4}\frac{1}{4.444} = 0.1767s$$

il tempo di campionamento così ottenuto è molto vicino a quello scelto, che dunque puoè essere considerato sostanzialmente corretto.

Parte B-III

Abbiamo che

$$B^+ = (z+0.1),\ B^- = (z+2),\ A^+ = (z-0.2)(z-0.1),\ A^- = (z-2),$$

per avere errore nullo al gradino occorre porre $q = 1$. Poniamo

$$R(z) = R''(z)(z-1)B^+,\ S(z) = S'(z)A^+(z),$$

i gradi sono dati da

$$\mathrm{gr}\{S'\} = \mathrm{gr}\{A^-\} + q - 1 = 1 + 1 - 1 = 1,\ \mathrm{gr}\{R''\} = \mathrm{gr}\{A\} - \mathrm{gr}\{B^+\} - 1 = 3 - 1 - 1 = 1$$

l'equazione diofantea per il progetto di ragazzini diventa

$$(r_1 z + r_0)(z-1)(z-2) + (s_1 z + s_0)(z+2) = z^3,$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 - 3r_1 + s_1 = 0 \\ -3r_0 + 2r_1 + s_0 + 2s_1 = 0 \\ 2r_0 + 2s_0 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$r_1 = 1,\ r_0 = \frac{4}{3}\ , s_1 = \frac{5}{3},\ s_0 = -\frac{4}{3}$$

il controllore cercato è quindi

$$C(z) = -\frac{(z-0.2)(z-0.1)(5/3z-4/3)}{(z+0.1)(z-1)(z+4/3)}\ .$$