Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 6 Luglio 2009 - Parte A

1 (5 punti)- Dimostra che per un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, l'uscita del sistema è data dalla convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso.

Determina l'uscita corrispondente all'ingresso $u(k) = 1(k)$ rispetto ad un sistema con risposta all'impulso data da $p(k) = \delta(k) - \delta(k-10)$.

2 (4 punti)- Illustra il problema dell'aliasing e spiega cos'è il filtro anti-alias.

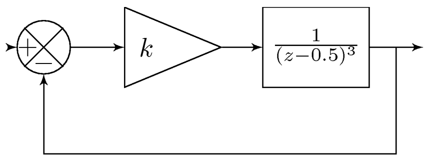
3 (4 punti)- Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, ha in ingresso il segnale $u(k) = 1(k)$ e l'uscita corrispondente è $y(k) = 0.5 \cdot 1(k) + 0.5^k$.
a- Determina la funzione di trasferimento del sistema.
b- Determina la risposta all'impulso del sistema.

4 (5 punti)- Il signor Rossi e il signor Bianchi hanno due greggi di pecore. Ogni anno, ogni gregge accresce il suo numero del 10 percento. I due pastori hanno fatto un patto: a fine anno chi dei due ha piu' pecore fornisce all'altro un numero di pecore pari alla differenza moltiplicata per un fattore $\alpha$.

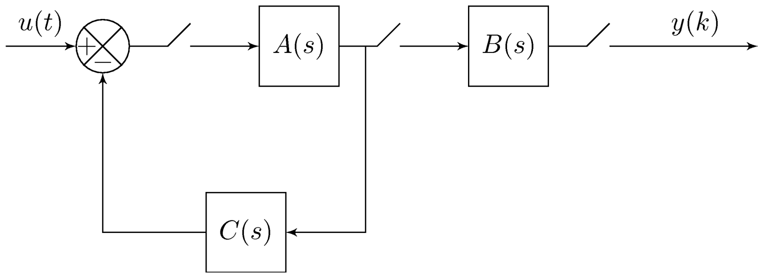
1)Chiamando $r(k)$ e $b(k)$ il numero di pecore all'inizio dell'anno $k$-esimo del signor rossi e, rispettivamente, del signor bianchi, determina l'equazione alle differenze che descrive l'evoluzione delle due successioni (per poter trattare il problema, supporre che il numero di pecore sia una variabile reale e non naturale).

2)Per quali valori di $\alpha$, a regime, la differenza tra il numero di pecore dei due allevatori tende a 0?

5 (5 punti)- Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile.



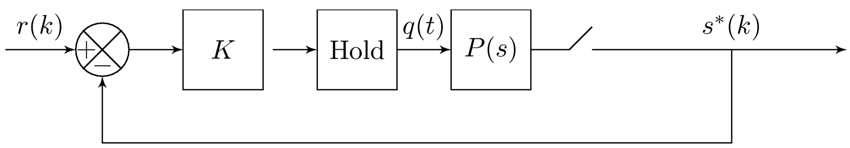

6 (5 punti)- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente a tempo discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi a tempo discreto. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.




7 (5 punti)- Nello schema seguente il sistema $P(s)$ rappresenta una caldaia, l'ingresso $q(t)$ è la quantità di carburante inserita al secondo nulla caldaia, mentre $s(t)$ rappresenta la temperatura della stanza. I termini $l$ e $\alpha$ sono opportuni coefficienti positivi, mentre $T_e$ rappresenta la temperatura dell'esterno. Il sistema è descritto dalla seguente equazione differenziale

$$Ds(t) = -ls(t) + \alpha q(t) \ ,$$

Lasciare indicato il tempo di campionamento genericamente con $T$.

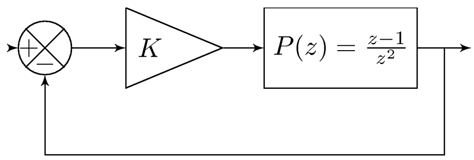



a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determina l'insieme dei valori del guadagno $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
c) Determina la temperatura a regime della stanza quando $r(k) = r_0 \cdot 1(k)$, in funzione del valore del guadagno $K$.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali per fuoricorso del 6 Luglio 2009 - Parte B

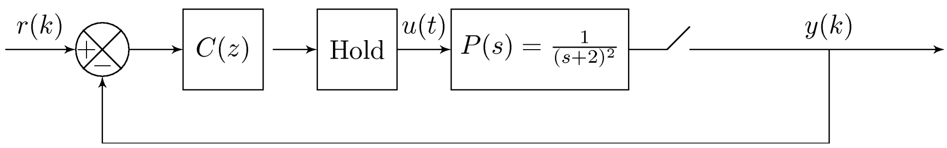
1- (7 p.) Presenta e giustifica il criterio per la verifica del tempo di campionamento legato alla pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale.

2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$




Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema $P(z) = \frac{z-1}{z^2}$ e determina l'intervallo dei valori in $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema collegato in retroazione è asintoticamente stabile.

3- (9 p.) In un progetto per discretizzazione, considera lo schema seguente, dove $P(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ e il tempo di campionamento è pari a $T = 0.1$ s.

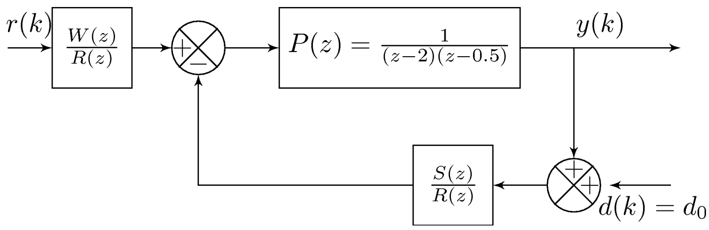



a- Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime alla rampa pari a $1/5$ e margine di ampiezza pari a 2. Il progetto va effettuato discretizzando con la trasformata di Tustin una rete di forma.

$$C_r(s) = K \frac{1 + \alpha \tau s}{s(1 + \tau s)} \ .$$

b- Discuti la correttezza del tempo di campionamento con il criterio basato sulla pulsazione critica.

4- (8 p.) Progetta i due controllori $\frac{W(z)}{R(z)}$, $\frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema




in modo che la funzione di trasferimento del sistema tra $r(k)$ ed $y(k)$ corrisponda ad un ritardo di un certo numero (da determinarsi) di passi di campionamento e che il disturbo costante $d(k) = d_0$ non abbia effetto sull'uscita $y(k)$ asintoticamente.

Soluzione:
Domanda 3
a- Abbiamo $U(z) = \frac{z}{z-1}$, $Y(z) = 0.5\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.5}$, la funzione di trasferimento è quindi

$$H(z) = T_x^y(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3z - 2.5}{2(z - 0.5)}$$

b- Antitrasformando, otteniamo

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)] = \frac{3}{2} - 0.5^k 1(k-1) \ .$$

Domanda 4
L'equazione alle differenze risulta
a)

$$r(k+1) = 1.1r(k) + \alpha(1.1b(k) - 1.1r(k))$$

$$b(k+1) = 1.1b(k) + \alpha(1.1r(k) - 1.1b(k))$$

b) Chiamiamo $d(k) = r(k) - b(k)$ la differenza tra il numero di pecore dei due pastori, sostituendo risulta

$$d(k+1) = 1.1(1-\alpha)d(k)$$

si tratta di un sistema del primo ordine con polo in $1.1(1-\alpha)$, la differenza va asintoticamente a zero se e solo se questo sistema è asintoticamente stabile, quindi se e solo se

$$-1 < 1.1(1-\alpha) < 1 \rightarrow \alpha \in (1/11,\ 21/11) \ .$$

Domanda 5
L'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^3 - 1.5z^2 + 0.75z + k - 0.125,$$

le condizioni necessarie sono
1) $1 > |k - 0.125| \rightarrow k \in (-0.875, 1.125)$
2) $q(1) > 0 \rightarrow k > -0.125$
3) $q(-1) < 0 \rightarrow k < 3.375$
la tabella di Jury è la seguente

| | $z^0$ | $z^1$ | $z^2$ | $z^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $-1.5$ | $0.75$ | $k - 0.125$ |
| 2 | $k - 0.125$ | $0.75$ | $-1.5$ | $1$ |
| 3 | $(k-0.125)^2 - 1$ | $*$ | $-1.5(k-0.125) - 0.75$ | |

l'ultima condizione è $|(k - 0.125)^2 - 1| > | - 1.5(k - 0.125) - 0.75|$, dalle condizioni precedenti si ricava che i due termini dentro il valore assoluto sono sempre negativi, la disequazione si riduce dunque a

$$(k - 0.125)^2 - 1 < -1.5(k - 0.125) - 0.75,$$

da cui si ottiene la condizione $k < 0.2764$. Complessivamente, quindi, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $-0.125 < k < 0.2764$.

Domanda 6
Applicando le regole di riduzione, si trova la seguente funzione di trasferimento

$$T_{u^*}^{y^*} = \frac{A(z)B(z)}{1 + AC(z)}$$

Domanda 7
Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento del sistema è data da

$$P(s) = \frac{\alpha}{s + l} \ .$$

Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{\alpha}{s(s+l)}] = \alpha\frac{1 - e^{-lT}}{l(z - e^{-lT})} \ ,$$

la funzione di trasferimento è quindi

$$T(z) = \frac{KL(z)}{1+KL(z)} = \frac{\alpha K(1-e^{-lT})}{b(z-e^{-lT})+K\alpha(1-e^{-lT})} \ .$$

b) Abbiamo $Q(z) = lz - be^{-lT} + \alpha k(1-e^{-lT})$. Essendo un sistema del primo ordine la stabilità asintotica è equivalente a

$$|-e^{-lT}) + \frac{\alpha k}{l}(1-e^{-lT})| < 1$$

quindi

$$-\frac{l}{\alpha} < k < \frac{l}{\alpha}\frac{1+e^{-lT}}{1-e^{-lT}} \ .$$

c) Con il segnale indicato in ingresso, l'uscita del sistema a regime è data da

$$y_\infty(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)r_0\frac{z}{z-1}\frac{\alpha K(1-e^{-lT})}{l(z-e^{-lT})+K\alpha(1-e^{-lT})} = r_0\frac{\alpha K}{l+K\alpha} \ .$$

Parte B

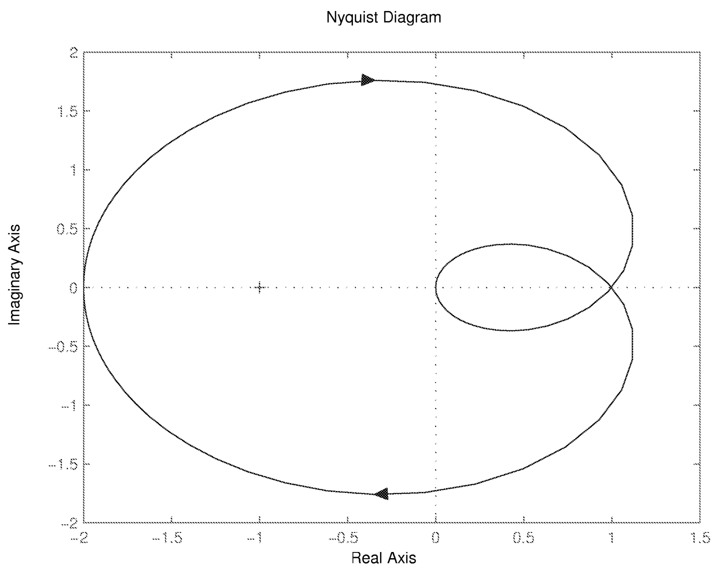
2- Facendo la trasformata di Tustin di $P(z)$ otteniamo

$$P_w(w) = \frac{2w(1-w)}{(1+w)^2} \ ,$$

Abbiamo $\lim_{\omega_w\to 0}\arg P_w(j\omega_w) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{\omega_w\to\infty}\arg P_w(j\omega_w) = -\pi$, il diagramma di Nyquist compie tre quarti di giro in senso orario attorno all'asse reale. Per trovare l'intersezione positiva con l'asse reale conviene porre

$$\arg P_w(j\omega_w) = 0 \to \omega_w = \tan(\pi/6) \simeq 0.5774, P_w(j0.5774) = 1 \ ,$$

inoltre $\lim_{w\to\infty} P_w(w) = -2$. Il diagramma risultante è il seguente.



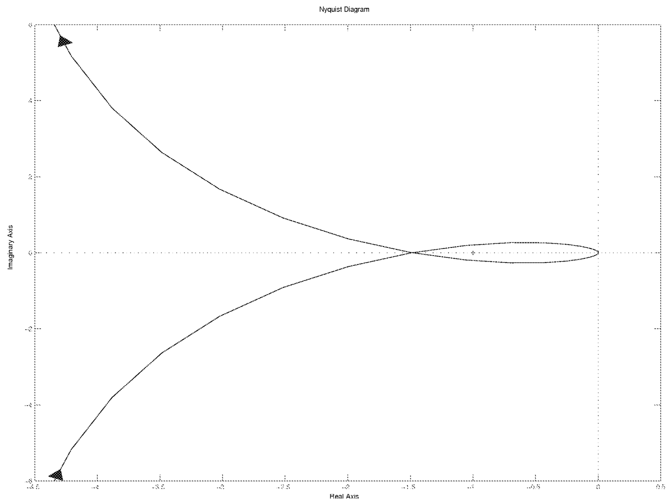

Il sistema è stabile se $-\frac{1}{k} < -2$ o se $-\frac{1}{k} > 1$, cioè se $-1 < k < 0.5$.

3- Nel progetto per discretizzazione approssimiamo il ritardo pari a $T/2$ nella forma $\frac{1}{1+sT/2} = \frac{20}{20+s}$ e consideriamo il sistema

$$P_d(s) = \frac{20}{(20+s)(s+2)^2} \ .$$

Per soddisfare alla specifica sull'errore alla rampa, dobbiamo porre $\lim_{s\to 0} sP_d(s)C_r(s) = 5$, da cui $K = 20$. Poniamo $P_2(s) = 20\frac{1}{s}P_d(s)$.

Il diagramma di Nyquist di $P_2(s)$ è il seguente, che va completato con un semicerchio all'infinito in senso orario.




In particolare, l'intersezione con l'asse reale avviene per $\omega_{w,0} \simeq 1.826\text{rad/s}$. Per imporre il margine di ampiezza richiesto, prendiamo ad esempio $\omega_0 = 1\text{rad/s}$, otteniamo $M = 2 * |P_s(j)| = 7.990$, $\phi = \pi + \arg(P_2(j)) = 0.5935$. Verifichiamo che $M \cos\phi = 6.6234 > 1$. Dalle formule di inversione otteniamo $\alpha = 0.0983$, $\tau = 12.8$, il controllore è dato dunque da

$$C(s) = 20\frac{1 + 1.258s}{s(1 + 12.8s)} \ ,$$

sostituendo $s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 20\frac{z-1}{z+1}$, otteniamo $C(z) = \frac{0.1018z^2+0.00778z-0.09401}{z^2-1.992z+0.9922}$. Il tempo di campionamento deve verificare la relazione

$$T < \frac{\pi}{4\omega_c} = 0.7854 \ ,$$

che risulta verificata. Il tempo di campionamento è ampiamente sufficiente per il progetto considerato.

4- Per cancellare lo zero stabile poniamo $S(z) = S'(z)(z-0.5)$, $W(z) = W'(z)(z-0.5)$. La funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita è data da

$$T_d^y(z) = -\frac{S'(z)}{R(z)(z-2) + S'(z)}$$

per avere rimozione asintotica del disturbo, occorre fattorizzare $S'$ come

$$S'(z) = (z-1)S''(z) \ .$$

A questo punto la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita è data da

$$T_r^y = \frac{W'(z)}{(z-2)R(z) + S''(z)(z-1)} = \frac{A_0(z)}{zA_0(z)} \ .$$

L'equazione diofantea è data da

$$(z-2)R'(z) + (z-1)S'(z) = A_0(z)z^2 \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo pari ad 0, poniamo $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S''] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 2$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-2)(r_2z^2 + r_1z + r_0) + (z-1)s_0 = z^3 \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_2 = 1, \ r_1 = 2, \ r_0 = -4, \ s_0 = 8 \ .$$

Poniamo quindi $A_0(z) = z$ e il polinomi risultano

$$R(z) = z^2 + 2z - 4, \ S(z) = 8(z-1)(z-0.5), \ W(z) = z(z-0.5) \ .$$