Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 7 Settembre 2009 - Parte A

1- (5 p.) Presenta e dimostra il teorema di traslazione in indietro nel tempo per la trasformata zeta.

2- (4 p.) Presenta e dimostra la formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta di $X(z)$.

3- (4 p.) Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, con funzione di trasferimeto $P(z) = \frac{z}{z-2}$ ha in uscita la funzione $y(k) = 1(k)$. Determina il segnale di ingresso del sistema.

4- (5 p.) Il numero di conigli in un territorio varia con la seguente relazione

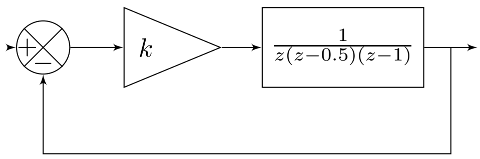
$$c(k+1) = 1.1c(k) - 0.2c(k)v \ ,$$

dove $c(k)$ indica la popolazione di conigli all'anno i-esimo e v la popolazione di volpi, supposta costante. Indica con $C = c(0)$ la popolazione iniziale di conigli.

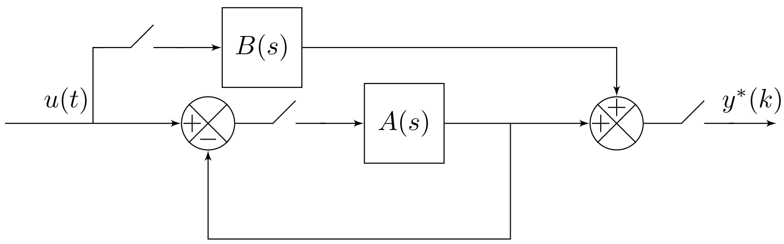
a) Determina la successione $c(k)$.

b) Qual'è la massima popolazione di volpi per cui la popolazione di conigli non si estingue?

5- (5 p.) Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è stabile con un margine di ampiezza almeno di 2



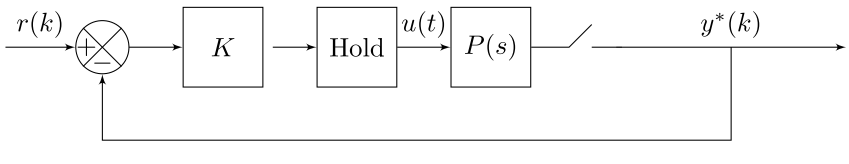
6- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente a tempo discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi a tempo discreto. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.



7- (5 p.) Nello schema seguente il sistema $P(s)$ soddisfa l'equazione

$$D^2y(t) = -by(t) + u(t) \ ,$$

Lasciare indicato il tempo di campionamento genericamente con T.

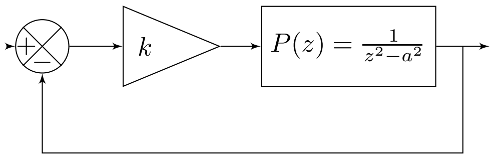


Calcola la funzione di trasferimento del sistema.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 7 Settembre 2009 - Parte B

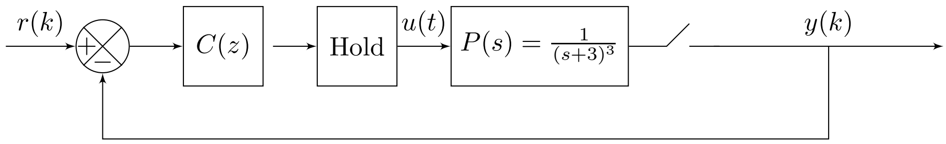
1- (7 p.) Presenta il metodo di discretizzazione basato sulla trasformata di Tustin, ricavandone la forma dall'approssimazione dell'operatore di derivazione. Confronta il comportamento in frequenza di un controllore a tempo continuo e del corrispondente controllore a tempo discreto ottenuto con questa trasformazione.

2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$ e a è un parametro reale tale che $0 < a < 1$.



Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema $P(z) = \frac{1}{z^2-a^2}$ e determina l'intervallo dei valori in $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema collegato in retroazione è asintoticamente stabile.

3- (9 p.) In un progetto per discretizzazione, considera lo schema seguente, dove $P(s) = \frac{1}{(s+3)^3}$ e il tempo di campionamento è pari a $T = 0.01$ s.



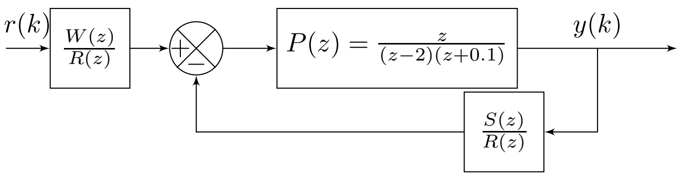
a- Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e banda passante pari a 20 rad/s. Il progetto va effettuato discretizzando con la trasformata di Tustin una rete anticipatrice di forma

$$C_a(s) = k\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \ ,$$

tenendo conto del ritardo associato al filtro di hold con l'approssimazione $e^{-\frac{sT}{2}} \simeq \frac{1}{1+s\frac{T}{2}}$. (Consiglio: usa le formule di inversione imponendo il passaggio del diagramma di Nyquist per un punto opportuno dell'asse reale).

b- Discuti la correttezza del tempo di campionamento con il criterio basato sulla pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale.

4- (8 p.) Progetta i due controllori $\frac{W(z)}{R(z)}$, $\frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema



in modo che i controllori $\frac{S(z)}{R(z)}$ e $\frac{W(z)}{R(z)}$ abbiano grado relativo 1 e la funzione di trasferimento del sistema tra $r(k)$ ed $y(k)$ corrisponda a $T_d(z) = \frac{1}{z^2}$.

Soluzione:
Domanda 3
$U(z) = \frac{Y(z)}{P(z)} = \frac{z-2}{z-1} = 1 - \frac{1}{z-1}$ quindi

$$u(k) = \delta(k) - 1(k-1) \; .$$

Domanda 4
a) Trasformando

$$zC(z) - zC = C(z)(1.1 - 0.2v) \rightarrow C(z) = \frac{zC}{z - 1.1 + 0.2v} \; ,$$

da cui si ottiene

$$c(k) = C(0.2v - 1.1)^k \; .$$

b)Il polo del sistema è dato da $p = 1.1 - 0.2v$. Il sistema diventa semplicemente stabile quando questo polo va in 1, da cui $1.1 - 0.2v = 1$, da cui $v = 0.5$.

Domanda 5
L'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^3 - 1.5z^2 + 0.5z + k,$$

le condizioni necessarie sono
1) $1 > |k| \rightarrow k \in (-1, 1)$
2) $q(1) > 0 \rightarrow k > 0$
3) $q(-1) < 0 \rightarrow k < 3$
la tabella di Jury è la seguente

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	1	-1.5	0.5	k
2	k	0.5	-1.5	1
3	$1-k^2$	$*$	$0.5+1.5k$	

l'ultima condizione è $|1 - k^2| > |0.5 + 1.5k|$, visto che si è già posto $k > 0$ e $|k| < 1$, i due termini devono essere positivi e possiamo togliere i moduli, quindi $1 - k^2 > 0.5 + 1.5k$ da cui $k < 0.2807$. Complessivamente, quindi, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < k < 0.2807$. Il sistema ha margine di ampiezza pari a 2 per i valori del guadagno k per cui il sistema è stabile per tutti i guadagni compresi tra $k/2$ e $2k$. La condizione da imporre è dunque

$$0 < [k/2, 2k] < 0.2807$$

da cui $k \in (0, 1403)$.

Domanda 6
Applicando le regole di riduzione, si trova la seguente funzione di trasferimento

$$T_{u^*}^{y^*} = B(z) + \frac{A(z)}{1 + A(z)} \; .$$

Domanda 7
Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento del sistema è data da

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + b} \; .$$

Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s^2 + b}] = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s^2 + b)}] \; .$$

Scomponiamo

$$\frac{1}{s(s^2 + b)} = \frac{1/b}{s} + \frac{1/bs}{s^2 + b} \; ,$$

da cui

$$L(z) = \frac{(z+1)(1 - \cos(\sqrt{b}T))}{z^2 - 2z\cos(\sqrt{b}T) + 1} \; .$$

la funzione di trasferimento è quindi

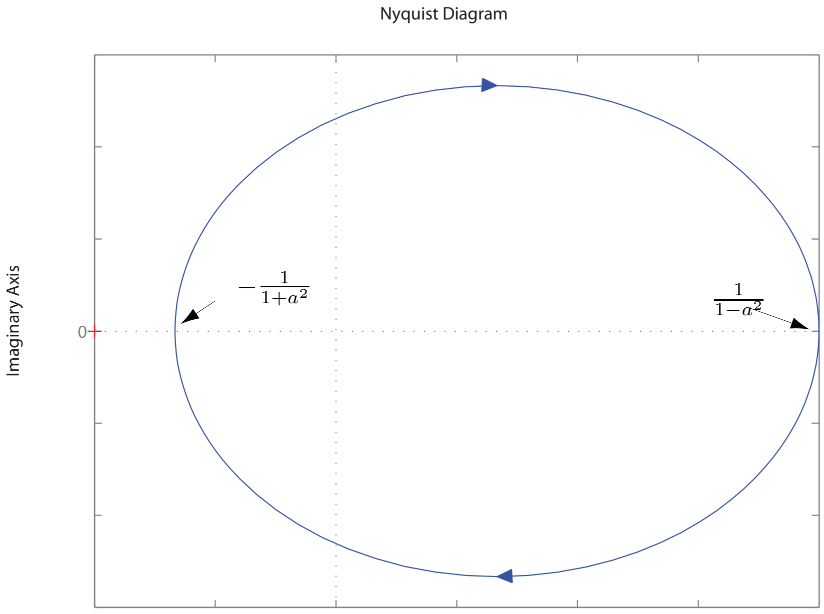
$$T(z) = \frac{kL(z)}{1 + kL(z)} = \frac{k(z+1)(1 - \cos(\sqrt{b}T))}{z^2 - 2z\cos(\sqrt{b}T) + 1 + k(z+1)(1 - \cos(\sqrt{b}T))} \; .$$

Parte B

2- Conviene sostituire $\bar{z} = z^2$, da cui si ottiene

$$P(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z} - a^2} \ ,$$

il diagramma di Nyquist di $P(z)$ è pari a quello di $P(\bar{z})$ percorso due volte, che è il seguente



Il sistema è asintoticamente stabile per

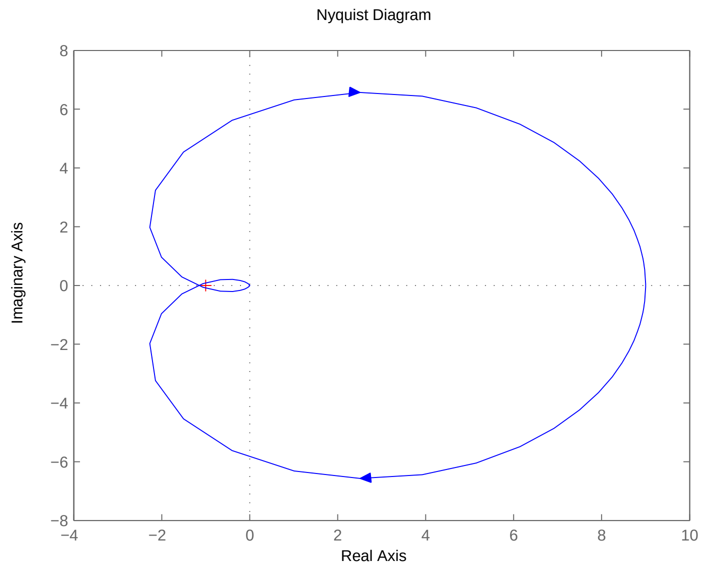
$$k \in (a^2 - 1, a^2 + 1) \ .$$

3- Nel progetto per discretizzazione approssimiamo il ritardo pari a $T/2$ nella forma $\frac{1}{1+sT/2} = \frac{200}{200+s}$ e consideriamo il sistema

$$P_d(s) = \frac{200}{(200+s)(s+3)^3} \ .$$

Per soddisfare alla specifica sul guadagno statico, occorre porre $kP_d(0) = 9$, da cui $k = 243$. Poniamo $L_2(s) = 243P_d(s)$.

Il diagramma di Nyquist di $L_2(s)$ è il seguente.



La pulsazione critica è data da $\omega_c \simeq 5.1$ rad/s. Per imporre la banda passante, prendiamo $\omega_0 = 20$rad/s, otteniamo $M = \frac{1}{\sqrt{2}|P_s(20j)|} = 24.19$, $\phi = -\pi - \arg(P_2(3j)) = 1.2238$. Verifichiamo che $M\cos\phi = 8.2263 > 1$. Dalle formule di inversione otteniamo $\alpha = 0.0125$, $\tau = 1.2680$, il controllore è dato dunque da

$$C(s) = 243\frac{1 + 1.268s}{1 + 0.01588s} \ ,$$

sostituendo $s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 20\frac{z-1}{z+1}$, otteniamo $C(z) = 243\frac{60.96z-60.48}{z-0.5212}$. Il tempo di campionamento deve verificare la relazione

$$T < \frac{\pi}{420} = 0.0393 \ ,$$

che risulta verificata.

4-

Per cancellare i poli e gli zeri stabili poniamo $S(z) = S'(z)(z+0.1)$, $W(z) = W'(z)(z+0.1)$,$R(z) = W'(z)z$. A questo punto la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita è data da

$$T_r^y = \frac{W'(z)}{(z-2)R'(z)+S'(z)} = \frac{A_0(z)}{z^2 A_0(z)} \ .$$

L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)R'(z) + S'(z) = A_0(z)z^2 \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo pari ad 1, poniamo $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S'] + 1$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 1$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-2)(r_1 z + r_0) + s_0 = z^2 \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_0 = 2, \ r_1 = 1, \ s_0 = 4 \ .$$

Poniamo quindi $A_0(z) = 1$ e il polinomi risultano

$$R(z) = (z+2)z, \ S(z) = 4(z+0.1), \ W(z) = (z+0.1) \ .$$