Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'8 Settembre 2008 - Parte A

1- (5 p.) Dimostra che la trasformata zeta è un operatore lineare e usa questa proprietà per calcolare la trasformata zeta della sequenza $\cos(\omega k)$ a partire dalla trasformata della progressione geometrica $\mathcal{Z}[a^k] = \frac{z}{z-a}$.

2- (6 p.)
a- Definisci il filtro di ricostruzione ideale per un segnale a banda limitata e calcolane la risposta all'impulso.
b- Fornisci un esempio di segnale a banda limitata, indicando esplicitamente l'espressione del segnale in funzione del tempo.

3- (6 p) Determina la risposta all'impulso di un sistema che ha la seguente funzione di trasferimento e disegnane il grafico nel tempo:

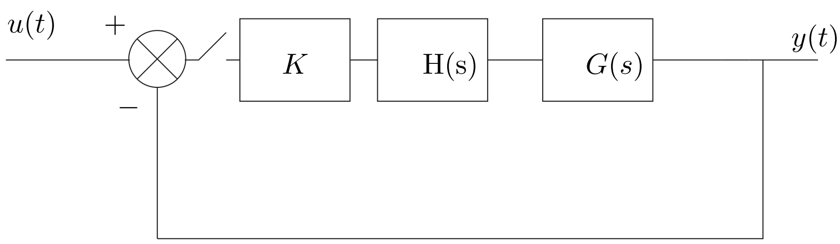
$$P(z) = \frac{1}{z^{10}(z^2 - 0.4z + 0.13)} .$$

4- (8 p.) Considera il seguente sistema alle differenze

$$\begin{array}{l} y(k+1) = x(k) + y(k) \\ x(k+1) = 0.9x(k) \\ y(0) = 0,\ u(0) = 1\ , \end{array}$$

a) determina $U(z)$ e $Y(z)$,
b) determina $u(k)$ e $y(k)$
c) determina $\lim_{k\to\infty} u(k)$, $\lim_{k\to\infty} y(k)$.

5- (8 p.) Considera lo schema seguente



a) Determina la funzione di trasferimento tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$, assumendo $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.
b) Posto $K = 1$, trova l'intervallo dei valori del tempo di campionamento $T > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'8 Settembre 2008 - Parte B

1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di Nyquist per la stabilità dei sistemi a tempo discreto.

2- (9 p.) a) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s, determinando in particolare le intersezioni con l'asse reale:

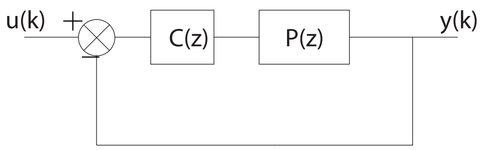
$$P(z) = \frac{1}{z(z+0.5)} .$$

b) Servendoti del diagramma precedente, disegna ora il diagramma di Nyquist del sistema

$$P_2(z) = \frac{1}{z^4(z^4+0.5)} .$$

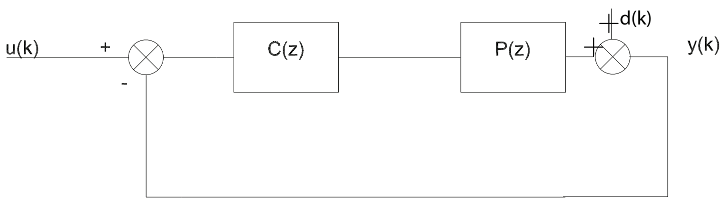
3- (9 p.) Considera il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e

$$P(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2}.$$



Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/10 e margine di ampiezza pari a 2. Svolgi il progetto nel piano w utilizzando come controllore la rete ritardatrice $C_w = k\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$. e ricordati, alla fine, di ritrasformare il controllore nel piano z con la trasformata di Tustin inversa.

4- a) (8 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{1}{z-0.2} ,$$

in modo che la risposta al gradino unitario sia di tipo deadbeat e i disturbi del tipo $d(t) = \sin(ak)$ siano asintoticamente eliminati dall'uscita (lasciare $a \in \mathbb{R}$ in forma simbolica).

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
Possiamo scrivere
$$P(z) = z^{-11}\frac{z}{z^2-0.4z+0.13} = z^{-9}P_1(z)\ ,$$
calcoliamo l'antitrasformata di $P_1(z) = \frac{z}{z^2-0.4z+0.13} = \frac{z}{(z-0.2-0.3j)(z-0.2+0.3j)}$,
$$p_1(k) = 2\mathrm{Re}\{\mathrm{Res}(P_1(z)z^{k-1}, 0.2+0.3j)\} = 2\mathrm{Re}\{\frac{(0.2+0.3j)^k}{0.6j}\} =$$
$$= 2\mathrm{Re}\{\frac{10}{6}0.13^k e^{jk\arctan\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}}\} = \frac{10}{3}0.13^k\sin(\arctan\frac{3}{2}k)\ ,$$
essendo per la regola della trasformata del segnale ritardato $p(k) = p_1(k-11)1(k-11)$, otteniamo
$$p(k) = \frac{10}{3}0.13^{k-11}\sin(\arctan\frac{3}{2}(k-11))1(k-11)\ .$$

Domanda 4
a) Trasformando il sistema otteniamo
$$\begin{array}{l} zY(z) = Y(z) + X(z) \\ zX(z) - z = 0.9X(z) \end{array}$$
la cui soluzione è
$$\begin{array}{l} X(z) = \frac{z}{z-0.9} \\ Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.9)}\ , \end{array}$$
b) antitrasformando otteniamo
$$\begin{array}{l} x(k) = 0.9^k \\ y(k) = 10(1-0.9^k)\ , \end{array}$$
c) risulta
$$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0,\ \lim_{k\to\infty} y(k) = 10\ .$$

Domanda 5
L'equivalente a tempo discreto del sistema è dato da
$$L(z) = \mathcal{Z}[H(z)P(z)] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+1)}] = \frac{z(T+e^{-T}-1) - Te^{-T} - e^{-T} + 1}{(z-1)(z-e^{-T})}\ ,$$
la funzione di trasferimento richiesta è data da
$$T(z) = \frac{KL(z)}{1+KL(z)} = \frac{Kz(T+e^{-T}-1) - Te^{-T} - e^{-T} + 1}{(z-1)(z-e^{-T}) + K(z(T+e^{-T}-1) - Te^{-T} - e^{-T} + 1)}$$
posto $K = 1$, l'equazione caratteristica è data da
$$q(z) = z^2 + z(T-2) + (1 - e^{-T}T)\ ,$$
dalla prima delle condizioni necessarie (che sono anche sufficienti in questo caso) abbiamo
$$1 > |1 - e^{-T}T|\ \text{sempre verificata}\ ,$$
dalla seconda
$$T(1-e^{-T}) > 0\ \text{sempre verificata}\ ,$$

dalla terza

$$4 - T(1 + e^{-T}) > 0 \; ,$$

l'ultima condizione è verificata per $T < 3.922$ (si risolve per via numerica per bisezione).

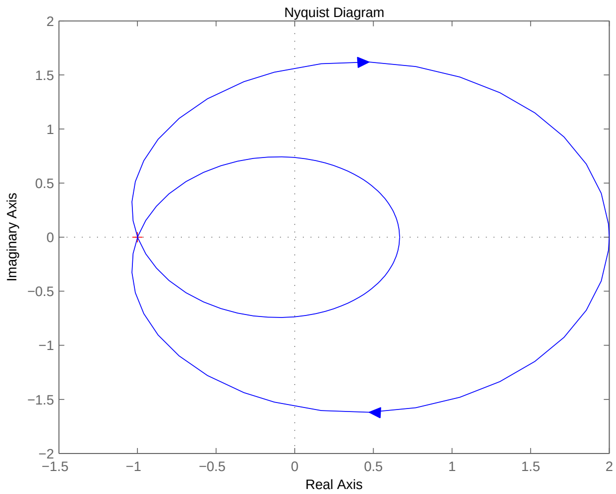
Parte B

2- a- Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = 2/3 \frac{(1 - w)^2}{(1 + w)(1 + 1/3w)} \; ,$$

si ha che $P(0) = 2/3$, $\lim_{j\omega_w \rightarrow \infty} P(j\omega_w) = 2$, inoltre il diagramma di Nyquist compie 1 giro in senso antiorario. L'intersezione con l'asse reale è in -1.

Il diagramma di Nyquist è il seguente



b- La nuova funzione di trasferimento si ottiene sostituendo a z la funzione z^4, cioè $P_1(z) = P(z^4)$. Il diagramma di Nyquist di $P_1(z)$ si ottiene calcolando $P_1(e^{j\omega T}) = P(e^{j4\omega T})$, il diagramma di $P_1(z)$ si ottiene quindi valutando la funzione $P(z)$ su un percorso che è dato dal cerchio unitario percorso 4 volte in senso antiorario, è dato quindi dal diagramma di $P(z)$ stesso percorso consecutivamente quattro volte in senso antiorario.

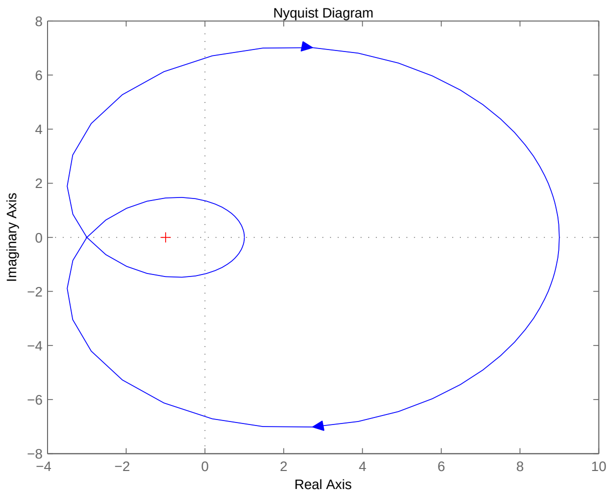
3-

Per avere errore a regime al gradino pari a 0.1 occorre porre $k = 9/4$. Chiamiamo $P_1(z) = 9/4 \frac{1}{(z-0.5)^2}$ e passiamo al piano w, otteniamo

$$P_{1w}(w) = 9 \frac{(1 - w)^2}{(1 + 3w)^2} \; ,$$

il punto di intersezione con l'asse reale è in -3 e si ottiene per $\omega_w = 1/\sqrt{3} = 0.577$.

Il diagramma di Nyquist di $P_1(z)$ è il seguente



Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 0.5$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P_w(0.5j)) = 0.2487,\ \ M = 2|P_w(0.5j)| = 6.9231$$

la condizione $M\cos(\phi) = 6.7101 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 48.37$ e $\alpha = 0.1385$, il controllore continuo risulta dunque

$$C_w(w) = 9/4\frac{1+6.701w}{1+48.38w}\ .$$

il controllore discreto, ottenuto con la trasformata di Tustin inversa è dato da

$$C(z) = \frac{0.3509z - 0.2598}{z - 0.9595}\ .$$

4-
Il controllore è dato da $C(z) = S(z)/R(z)$ e l'impianto da $P(z) = B(z)/A(z)$. La funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita è data da

$$T_{dy} = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} = \frac{A(z)R(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)}\ .$$

La trasformata zeta del disturbo $d(k) = \sin(ak)$ è data da $D(z) = \frac{z\sin a}{z^2 - 2z\cos a + 1}$, per eliminare il contributo a regime del disturbo occorre dunque cancellare la coppia di poli sul cerchio unitario di $D(z)$ ponendo $R(z) = R'(z)(z^2 - 2z\cos a + 1)$, per avere risposta di tipo deadbeat al gradino occorre inoltre inserire in $R(z)$ un polo in $z = 1$, otteniamo dunque $R(z) = R''(z)(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)$. Inoltre $S(z) = (z - 0.2)S'(z)$ per cancellare i poli stabili del sistema. L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)R''(z) + S'(z) = z^l\ .$$

Per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R''] + 4$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R''] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 2$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R''] + 3 = \mathrm{Gr}[S'] + 1$, da cui $\mathrm{Gr}[R''] = 0$. L'equazione diofantea diventa

$$(z-1)(z^2 - 2z\cos a + 1)(r_0) + (s_2 z^2 + s_1 z + s_0) = z^3\ .$$

uguagliando i termini di grado corrispondente otteniamo il sistema

$$\begin{array}{l} r_0 = 1 \\ -r_0 - 2\cos a r_0 + s_2 = 0 \\ r_0(2\cos a + 1) + s_1 = 0 \\ -r_0 + s_0 = 0 \end{array}$$

da cui otteniamo

$$r_0 = 1,\ s_2 = (1 + 2\cos a),\ s_1 = -1 - 2\cos a,\ s_0 = 1\ ,$$

quindi,

$$S(z) = (z - 0.2)((1 + 2\cos a)z^2 - (1 + 2\cos a)z + 1)),\ R(z) = (z^2 - 2\cos az + 1)(z - 1)\ .$$