Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 10 Luglio 2006
Parte A

1- Dato un segnale continuo $x(t)$, con trasformata di Laplace $X(s)$, determina l'espressione che lega la trasformata di Laplace del segnale campionato

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-kT)$$

ad $X(s)$, dimostrando il risultato ottenuto.

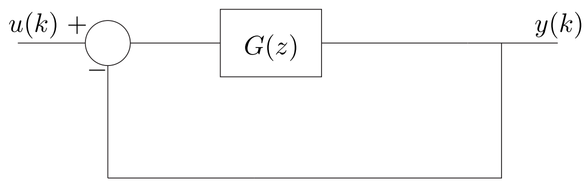
2- Definisci il concetto di *stabilità ingresso limitato- uscita limitata* per un sistema discreto. Quali sono le condizioni che ti permettono di dire che un sistema presenta questa proprietà ?

3- Determina la *funzione di trasferimento* e la *risposta all'impulso* di un sistema discreto lineare e tempo invariante in cui, all'ingresso $u(k) = k$, corrisponde l'uscita

$$y(k) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \leq 0 \\ 1 \text{ se } k > 0 \end{cases}$$

determina inoltre l'*equazione alle differenze* che descrive il sistema.

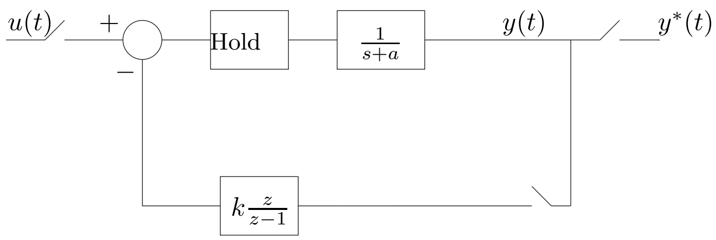
4- Usando il metodo della tabella di Jury, determina l'insieme dei valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema discreto è asintoticamente stabile



con

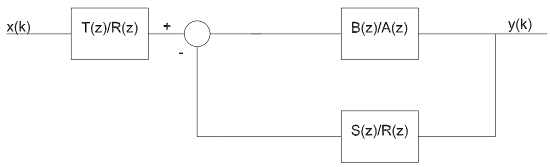
$$G(z) = \frac{0.5}{z^2(z+a)} \ .$$

5- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(t)$ e l'uscita campionato $y^*(t)$. Determina i valori del parametro k per cui il sistema è asintoticamente stabile e calcola la trasformata di Laplace dell'uscita (non campionata) $y(t)$ quando l'ingresso del sistema è il gradino unitario. Assumere $a > 0$.



Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 10 Luglio 2006
Parte B

1- Illustra il progetto analitico per il seguente sistema, in cui $\frac{B(z)}{A(z)}$ rappresenta l'impianto da controllare e $T(z)$, $R(z)$, $S(z)$ i polinomi del regolatore da determinare



il progetto deve prevedere la presenza di un'azione integrale di ordine q (q poli in 1) nel controllore e la cancellazione degli zeri e dei poli stabili del sistema.

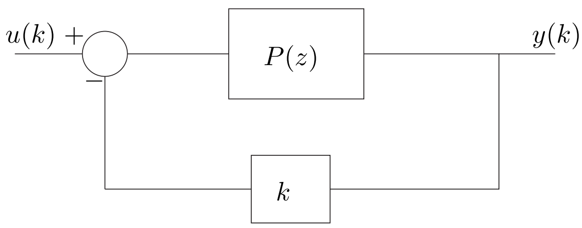
In particolare

- calcola la funzione di trasferimento complessiva del sistema
- presenta e giustifica le condizioni che deve rispettare la funzione di trasferimento $G_m(z)$ da imporre
- ricava l'equazione diofantea e trova i gradi minimi dei polinomi incogniti che consentono di risolverla.

2- Disegna il diagramma di Nyquist completo per il seguente sistema

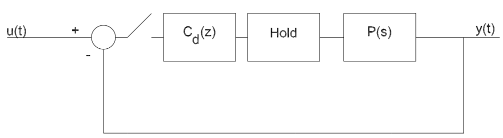
$$P(z) = \frac{z + 0.5}{z(z-1)}$$

servendoti della trasformazione bilineare $z = \frac{1+w}{1-w}$. Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k



e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato.

3- Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{(2-s)(s+20)}{20s(s+2)} \ , \ C(s) = k\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$$

nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considera un tempo di campionamento $T = 0.1s$.

a- Determina la costante K che consente un errore a regime in risposta alla rampa pari a $\frac{1}{2}$.

b- Traccia il diagramma di Nyquist del sistema continuo, senza la rete ritardatrice ma tenendo conto del guadagno K.

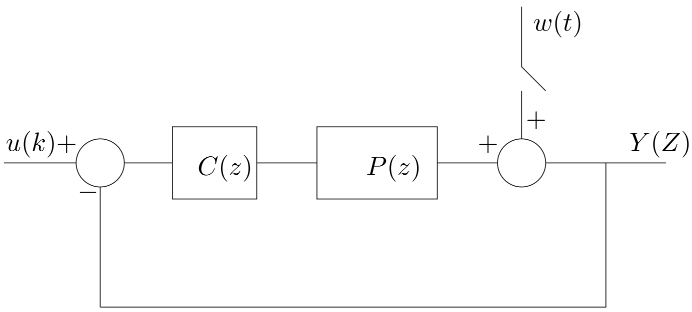
c- Calcola il margine di fase.

d- Progetta il controllore continuo $C(s)$ che consenta di avere un margine di fase pari a $M_f = 30°$.

e- Discretizza il controllore trovato attraverso il metodo della corrispondenza poli-zeri.

f- Discuti se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

4- Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{z-0.1}{(z-0.5)(z-1)} \ , w(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$$

considerando il tempo di campionamento $T = 1s$. Le specifiche sono le seguenti

- risposta di tipo deadbeat al gradino unitario in ingresso
- soppressione asintotica completa dell'effetto del disturbo sinusoidale $w(t)$ sull'uscita.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
Facendo la trasformata zeta dell'ingresso e dell'uscita otteniamo

$$U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}\ , Y(z) = \frac{1}{z-1}\ ,$$

da cui la funzione di trasferimento è data da

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z}$$

la risposta all'impulso è l'antitrasformata zeta della funzione di trasferimento è data quindi da

$$h(k) = \delta(k) - \delta(k-1)\ ,$$

l'equazione alle differenze che descrive il sistema è data da

$$y(k+1) = u(k+1) - u(k)\ .$$

Domanda 4
La funzione di trasferimento è

$$T(z) = \frac{0.5}{0.5 + z^2(z+a)}$$

l'equazione caratteristica è data quindi da

$$q(z) = 0.5 + z^2(z+a) = z^3 + az^2 + 0.5\ ,$$

le condizioni necessarie sono

$$1)\ 1 > |0.5| \text{ verificata}$$

$$2)\ q(1) > 0 \leftarrow a > -1.5\ ,$$

$$3)\ q(-1) < 0 \leftarrow a < 0.5\ ,$$

costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.5	0	a	1
2	1	a	0	0.5
3	-0.75	$-a$	a	

la quarta condizione è dunque

$$|-0.75| > |0.5a| \rightarrow |a| < 1.5$$

facendo l'intersezione delle condizioni trovate, otteniamo

$$a \in (-1.5, 0.5)\ .$$

Domanda 5

L'equivalente discreto della serie del filtro di hold e del sistema continuo è dato da

$$P(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+a}] = \frac{1}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}\ ,$$

la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{P(z)}{1 + k\frac{z}{z-1}P(z)} = \frac{(z-1)(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT}) + kz(1-e^{-aT})}$$

il polinomio caratteristico è dato da

$$az^2 + z(-a - ae^{-aT} + k(1-e^{-aT})) + ae^{-aT} \ ,$$

applicando le condizioni necessarie per la stabilità troviamo

$$\begin{array}{l} 1 > e^{-aT} \text{ sempre verificata} \\ ka > a \\ 2 + 2e^{-aT} + k(1-e^{-aT}) > 0 \rightarrow k > 2\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \end{array}$$

da cui il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$k > 2a\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} \ .$$

Se l'ingresso è un gradino, la trasformata zeta del segnale errore è data da

$$E(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{1+P(z)\frac{z}{z-1}} = \frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT}) + (1-e^{-aT})z}$$

la trasformata di laplace di questo segnale discreto si ottiene con la sostituzione $z = e^{sT}$

$$E^*(s) = \frac{e^{sT}(1-e^{-aT})}{a(e^{sT}-1)(e^{sT}-e^{-aT}) + (1-e^{-aT})e^{sT}}$$

e dunque la trasformata dell'uscita $y(t)$ è data da

$$Y(s) = E^*(s)H(s)\frac{1}{s+a} = \frac{e^{sT}(1-e^{-aT})}{a(e^{sT}-1)(e^{sT}-e^{-aT}) + (1-e^{-aT})e^{sT}}(1-e^{-sT})\frac{1}{s+a} \ .$$

Parte B

2-
Nella variabile w il sistema è dato da

$$P_w(w) = 3/4\frac{(1-w)(1+1/3w)}{w(1+w)} \ ,$$

abbiamo $P_w(0) = 4/3$, $\lim_{\omega_w \to \infty} P_w(j\omega_w) = -1/4$, inoltre

$$\arg P_w(j\omega_w) = -2\arctan\omega_w + \arctan(1/3\omega_w) \ ,$$

da cui abbiamo che il diagramma di Nyquist compie mezzo giro in senso antiorario. Il diagramma presenta un asintoto verticale per $\sigma = -5/4$, l'intersezione con l'asse reale si ottiene dal polinomio

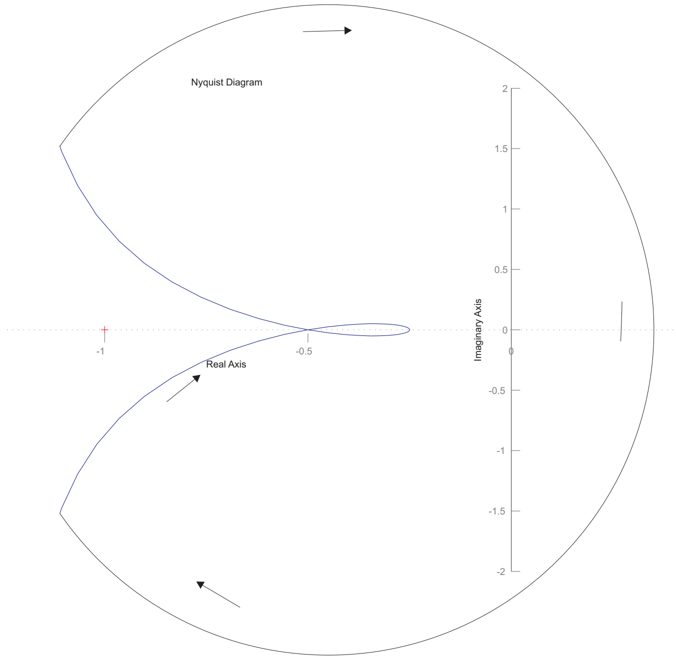
$$\eta + P_w(w) \rightarrow 4\eta w(1+w) + 3(1-w)(1+1/3w) \rightarrow w^2(4\eta - 1) + w(4\eta - 2w) + 3$$

per avere due radici immaginare, poniamo il coefficiente di primo grado pari a 0, da cui $\eta = 0.5$, Sostituendo il valore di η otteniamo l'equazione caratteristica

$$w^2 + 3 = 0$$

che ha radici immaginarie, dunque il diagramma di Nyquist ha un intersezione con l'asse reale in $z = -0.5$. La funzione $P(z)$ ha uno zero e due poli all'interno del contorno di Nyquist, il diagramma di Nyquist compie quindi un giro in senso antiorario attorno all'origine.

Il diagramma complessivo è quindi il seguente



l'insieme dei valori di k per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile si trova risolvendo la disequazione

$$-\frac{1}{k} < -0.5$$

da cui

$$k \in (0, 2) \ .$$

3-

Il filtro di hold viene approssimato con

$$H_0(s) = \frac{20}{20 + s} \ ,$$

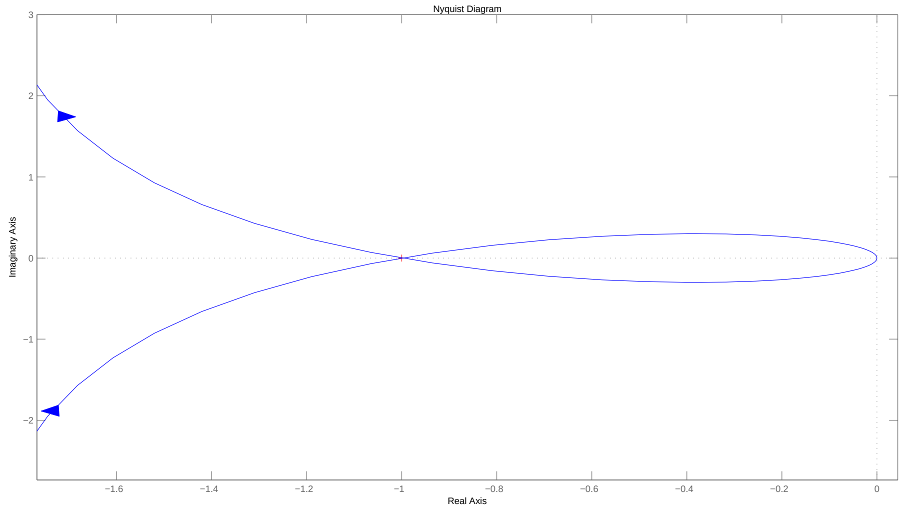
dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che $k = 2$, definiamo

$$L(s) = kH_0(s)P(s) = 2\frac{2 - s}{s(2 + s)} = 2\frac{1 - 0.5s}{s(1 + 0.5s)} \ ,$$

il diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale con ascissa

$$\sigma = 2(-0.5 - 0.5) = -2 \ ,$$

ed il diagramma è il seguente



calcoliamo l'intersezione con il cerchio unitario ponendo $|L(j\omega)| = 1$, otteniamo $\omega_c = 2$ rad/s, abbiamo che

$$\arg L(j\omega_c) = -\pi \ ,$$

dunque il margine di fase è pari a $M_f = 0$. Per progettare la rete ritardatrice prendiamo $\omega_0 = 1$, da cui

$$M = |L(j)| = 2 \ , \phi = \pi - M_F + \arg L(j) = 0.1199 \ ,$$

la condizione $M \cos\phi > 1$ è soddisfatta. Applicando le formule di inversione otteniamo

$$\alpha = 0.4893, \ \tau = 8.4202 \ ,$$

e il controllore continuo risulta

$$C(s) = 2\frac{1 + 4.12s}{1 + 8.42s} = 0.9786\frac{s + 0.2427}{s + 0.1188} \ ,$$

il controllore discretizzato con la corrispondenza poli-zeri risulta

$$C(z) = 0.98469\frac{z - 0.976}{z - 0.9882} \ ,$$

il tempo di campionamento può essere stimato con la relazione

$$T \leq \frac{\pi}{4 \cdot 0.2427} = 3.23 \text{ s}$$

e dunque risulta appropriato.

4- Cancelliamo i poli e gli zeri stabili, ponendo

$$S(z) = (z - 0.5)S'(z) \ , R(z) = (z - 0.1)R'(z) \ ,$$

per avere errore nullo alla rampa non è necessario aggiungere alcun polo in 1. La funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita è data da

$$T_2(z) = \frac{1}{1 + P(z)C(z)}$$

il contributo del disturbo sull'uscita è dato da

$$\frac{z}{z^2+1}\frac{R'(z)(z-1)}{R'(z)(z-1)+s'(z)}$$

per annullarlo occorre porre

$$R'(z)=(z^2+1)R''(z)$$

otteniamo l'equazione caratteristica

$$\frac{W'(z)}{(z-1)(z^2+1)R''(z)+(z^2+1)S'(z)}\ ,$$

il numero di equazioni è dato da $1+\mathrm{Gr}[R]''+3$ e il numero di variabili è dato da $1+\mathrm{Gr}[R]''+\mathrm{Gr}[S]''+1$, uguagliando queste due quantità otteniamo $\mathrm{Gr}[S]'=2$. Per avere un controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[S]=\mathrm{Gr}[R]$, da cui

$$\mathrm{Gr}[S]''+1=\mathrm{Gr}[R]''+1+2,$$

per cui $\mathrm{Gr}[R]'=0$, quindi poniamo, per avere una risposta di tipo deadbeat

$$\frac{W'(z)}{(z-1)(z^2+1)r_0+(s_2z^2+s_1z+s_0)}=\frac{N(z)}{z^3}\ ,$$

eqguagliando i denominatori, otteniamo

$$z^3(r_0-1)+z^2(s_2-r_0)+z(r_0+s_1)+s_0-r_0=0$$

da cui

$$r_0=1,\ s_2=1,\ s_1=-1,\ s_0=1\ ,$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z)=\frac{0.5(z-0.5)(z^2-z+1)}{(z-0.1)(z^2+1)}\ .$$