Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'11 Gennaio 2009 - Parte A

1- (6 p.) Presenta e dimostra il teorema dei residui.

2- (6 p.) Definisci all'interno del piano z i luoghi a crescita esponenziale costante ed a pulsazione costante.

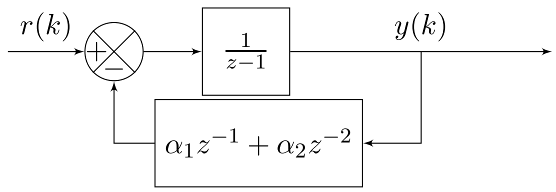
3- (6 pt.) Un sistema a tempo discreto, con ingresso il segnale $u(k)$ e con uscita $y(k)$ è descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) = u(k) + u(k-1);$$

a) Determina la funzione di trasferimento e la risposta all'impulso del sistema ,
b) Determina un segnale di ingresso $u(k)$ la cui uscita corrispondente sia

$$y(k) = \delta(k) \ .$$

4- (8 p.) Considera il seguente sistema

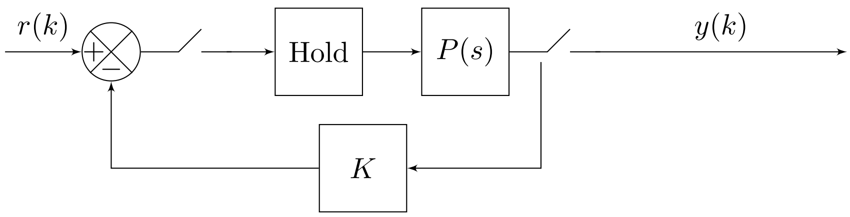


a) Determina la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determina sul piano (α_1, α_2) l'insieme dei valori dei parametri $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
c) Posto $\alpha_1 = 9/2$ deterimina il valore di α_2 per cui l'errore a regime alla rampa è pari a 0.2. Per questi valori dei parametri il sistema è asintoticamente stabile?

5- (7 p.) Nello schema seguente l'impianto $P(s)$ descrive il comportamento di una massa posta su un piano. Sulla massa agiscono una forza esterna $f(t)$, ingresso del sistema, ed una forza di attrito viscoso, mentre l'uscita del sistema è data dalla posizione x della massa. Il sistema è descitto dall'equazione differenziale

$$M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = f - D \frac{d}{dt} x(t) \ ,$$

dove M è la massa, D è il coefficiente di smorzamento e $K \in \mathbb{R}$ è una costante di guadagno.

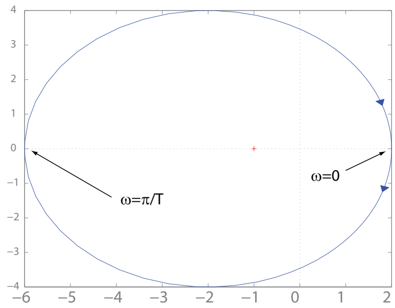


a) Determina la funzione di trasferimento $P(s)$.
b) Determina la funzione di trasferimento del sistema dall'ingresso campionato $u(k)$ all'uscita campionata $y(k)$.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali dell'11 Gennaio 2009 - Parte B

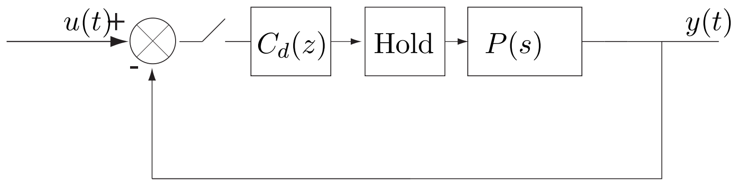
1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di Nyquist per i sistemi a tempo discreto.

2- (8 p.) Considera il seguente diagramma di Nyquist.



Determina la funzione di trasferimento del sistema, sapendo che questa ha la forma $P(z) = \frac{K}{z-a}$, con $K, a \in \mathbb{R}$.

3- (9 p.) Considera il seguente sistema, dove $P(s) = \frac{1}{(s+2)}$.



Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete anticipatrice $C(s) = K\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$, in modo da avere

1) errore a regime al gradino unitario pari ad 1/10,

2) banda passante ad anello chiuso pari a 50 rad/s. (Ricorda che la banda passante ad anello chiuso è il valore di pulsazione per cui il modulo della funzione di risposta armonica ad anello chiuso del sistema è $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

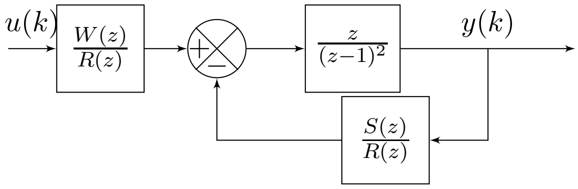
Nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.01s$. La discretizzazione va effettuata per mezzo della trasformata di Tustin.

Consiglio: determina il guadagno K, quindi usa la cancellazione poli-zeri e imponi la condizione sulla banda passante per determinare il parametro rimasto.

4- (9 p.) a- Progetta i polinomi $W(z), S(z), R(z)$ per il seguente sistema, in modo tale che l'uscita $y(k)$ sia una copia ritardata dell'ingresso $u(k)$.



Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Facendo la trasformata zeta dell'equazione alle differenze:

$$Y(z) = U(z) + U(z)z^{-1} \rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z} \ ,$$

la funzione di trasferimento del sistema è quindi $P(z) = \frac{z+1}{z}$, antitrasformando troviamo la risposta all'impulso

$$p(k) = \delta(k) + \delta(k-1) \ .$$

b) Se $y(k) = \delta$ allora $Y(z) = 1$, sappiamo che $U(z) = Y(z)\frac{z}{z+1}$ e quindi $U(z) = \frac{z}{z+1}$, antitrasformando

$$u(k) = (-1)^k \ .$$

Domanda 4
a- La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{\frac{1}{z-1}}{1 + \frac{\alpha_1 z + \alpha 2}{z^2(z-1)}} = \frac{z^2}{z^2(z-1) + \alpha_1 z + \alpha_2} \ .$$

b- L'equazione caratteristica è

$$q(z) = z^3 - z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 \ .$$

Le condizioni per la stabilità asintotica sono
1) $|\alpha_2| < 1$
2) $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$
3) $\alpha_2 < \alpha_1 + 2$
Essendo il grado del polinomio pari a 3 costruiamo la tabella di Jury:

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	α_2	α_1	-1	1
2	1	-1	α_1	α_2
3	$\alpha_2^2 - 1$	$\star$	$-\alpha_2 - \alpha_1$	

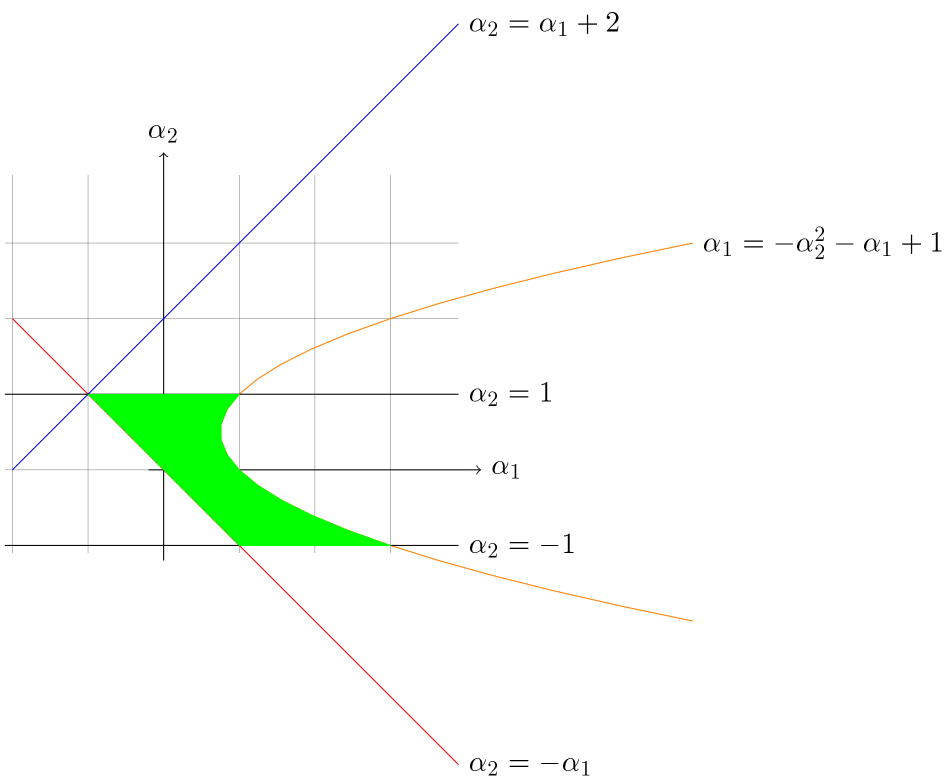
in cui $\star$ rappresenta un termine ininfluente, l'ultima condizione è data da

$$|\alpha_2^2 - 1| > |-\alpha_2 - \alpha_1| \ ,$$

visto che $\alpha_2 < 1$ e $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, possiamo riscrivere questa condizione come

$$1 - \alpha_2^2 > \alpha_1 + \alpha_2 \ .$$

Rappresentiamo le tre disequazioni trovate nel piano (α_1, α_2), l'intersezione è l'area evidenziata in verde.



c) Dovrebbero valere la condizioni $\lim_{z\to 1} T(z)(z-1) = 1/5$, da cui $1 + 9/2 + \alpha_2 = 5$, da cui $\alpha_2 = -1/2$, ma questi valori non appartengono alla zona di stabilità .

Domanda 5

a) Facendo la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale si ottiene

$$Ms^2X(s) = F(s) - DsX(s) ,$$

da cui

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(Ms+D)} .$$

b) Scomponiamo $P(s)$ in fratti semplici

$$P(s) = -\frac{M}{D^2}\frac{1}{s} + \frac{M}{D^2}\frac{1}{s+\frac{D}{M}} + \frac{1}{D}\frac{1}{s^2} ,$$

calcoliamo la trasformata zeta della serie del filtro di hold e del sistema

$$P(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(Ms+D)}] = \frac{1}{D}\frac{z-1}{z}\left(-\frac{M}{D}\frac{z}{z-1} + \frac{M}{D}\frac{z}{z-e^{-D/MT}} + \frac{Tz}{(z-1)^2}\right) ,$$

da cui

$$P(z) = \frac{M/D\left(z(e^{-DT/M}-1) + 1 - e^{-DT/M}\right) + T(z-e^{-DT/M})}{D(z-1)(z-e^{-DT/M}} .$$

La funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{P(z)}{1+kP(z)} = \frac{M/D[z(e^{-DT/M}-1) + 1 - e^{-DT/M}] + T(z-e^{-DT/M})}{D(z-1)(z-e^{-DT/M}) + k\left(M/D(z(e^{-DT/M}-1) + 1 - e^{-DT/M}) + T(z-e^{-DT/M})\right)} .$$

Parte B

2-

Dal diagramma di Nyquist fornito vediamo che $P(1) = 2$, $P(-1) = -6$, abbiamo quindi le due condizioni

$$\begin{cases} \frac{K}{1-a} = 2 \\ \frac{K}{-1-a} = -6 , \end{cases}$$

dividendo la seconda equazione per la prima otteniamo $\frac{1-a}{1+a}=3$, da cui $a=-1/2$, sostituendo questo valore nella prima equazione troviamo $K=3$.

3-

Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s)=\frac{200}{200+s}\ ,$$

da cui

$$P_2(s)=P(s)H(s)=\frac{200}{(s+2)(s+200)}\ ,$$

per avere errore a regime al gradino pari ad 1/10, deve valere la condizione

$$1/9=\frac{1}{P_2(0)C(0)}\rightarrow K=18\ .$$

Cancelliamo il polo del sistema con lo zero della rete anticipatrice, poniamo quindi $\frac{1}{\tau}=2$ da cui $\tau=\frac{1}{2}$. Otteniamo quindi

$$L(s)=P(s)C(s)=9\frac{1}{(1+\frac{\alpha s}{2})(1+\frac{s}{200})}\ ,$$

per determinare α imponiamo la specifica sull'ampiezza di banda ad anello chiuso. La funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$T(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{1}{1+1/9(1+\frac{s}{200})(1+\frac{\alpha s}{2})}\ ,$$

imponiamo $|T(50j)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, da cui

$$|1+1/9(1+\frac{j}{4})(1+25\alpha j)|=\sqrt{2}\rightarrow(\frac{10}{9}-\alpha\frac{25}{36})^2+(\alpha\frac{25}{9}+\frac{1}{36})^2=2\ .$$

Risovlendo questa equazione e prendendo la soluzione positiva otteniamo $\alpha=0.4016$.

Il controllore cercato è quindi

$$C(s)=18\frac{1+0.5s}{1+0.2008s}\ .$$

Il controllore discretizzato attraverso la regola di Tustin è dato da

$$C_d(z)=\frac{44.17z-43.29}{z-0.9514}\ .$$

4-

a) Scriviamo $R(z)=zR'(z)$ per cancellare lo zero del sistema. La funzione di trasferimento tra $u(k)$ e $y(k)$ è data da

$$T(z)=\frac{W(z)}{R'(z)(z-1)^2+S(z)}\ ,$$

per fare in modo che il sistema si comporti come un ritardo, la sua funzione di trasferimento deve essere del tipo $T(z)=z^{-l}$. Essendo il grado relativo del sistema pari ad 1, possiamo prendere $l\geq 1$, scegliamo $l=1$. La funzione di trasferimento che vogliamo imporre è data quindi da

$$T_d z=\frac{1}{z}=\frac{A_O(z)}{zA_O(z)}\ ,$$

in cui $A_0(z)$ è un polinomio con radici interne al cerchio unitario che possiamo scegliere a piacere.

Per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R']+3$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S]+\mathrm{Gr}[R']+2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S]$ da cui $\mathrm{Gr}[R'] + 1 = \mathrm{Gr}[S\prime]$ e $\mathrm{Gr}[R] = 0$. Essendo il grado dell'equazione diofantea pari a 2 dobbiamo mettere a membro destro un polinomio di grado 2, scegliamo quindi $A_0(z) = z$.

L'equazione diofantea è data da

$$r_0(z-1)^2 + s_1 z + s_0 = z^2 \ ,$$

da cui

$$r_0 = 1,\ s_2 = 3 s_1 = 2,\ s_0 = -1 \ ,$$

i polinomi cercati risultano

$$W(z) = A_0(z) = z, S(z) = 2z - 1, R(z) = z \ .$$