Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 11 Settembre 2006
Parte A

1- Definisci la trasformata zeta di una sequenza $x(k)$. Presenta e dimostra il teorema di traslazione in avanti nel tempo.

2- Presenta la condizione necessaria che garantisce che il polinomio

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_0$$

abbia tutte le radici all'interno del cerchio unitario e dimostra il risultato ottenuto.

3- Determina la *funzione di trasferimento* e la *risposta all'impulso* di un sistema discreto lineare e tempo invariante in cui, all'ingresso $u(k) = 1$, corrisponde l'uscita

$$y(k) = \begin{cases} 0 \text{ se } k < 0 \\ (1 - 0.5^k) \text{ se } k \geq 0 \end{cases}$$

determina inoltre l'*equazione alle differenze* che descrive il sistema.

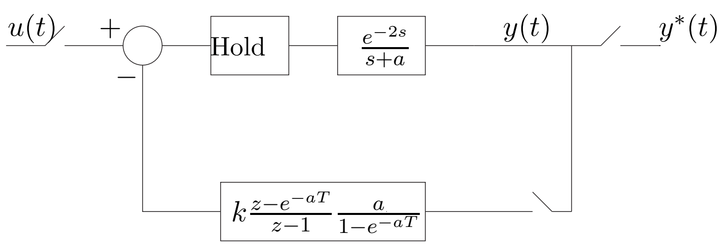
4- Considera la seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} x(k) = x(k-1) + k \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- Risolvi l'equazione alle differenze con l'uso della trasformata zeta, determinando la soluzione $x(k)$,
- Usa il risultato ottenuto per calcolare la somma dei primi 100 numeri naturali.

5- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(t)$ e l'uscita campionato $y^*(t)$. Determina i valori del parametro k per cui il sistema è asintoticamente stabile. Assumere $a > 0$ e un tempo di campionamento pari a $T = 1s$

Ricorda che $\mathcal{Z}[e^{-nTs}P(s)] = z^{-n}\mathcal{Z}[P(s)]$.



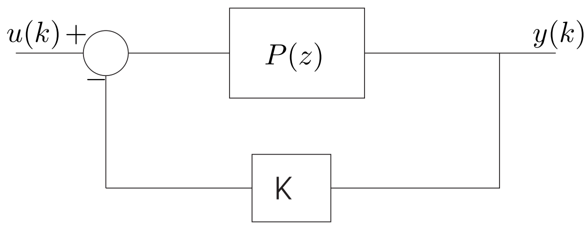
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 11 Settembre 2006
Parte B

1- Illustra il metodo di discretizzazione basato sulla trasformazione di Tustin, ricavando la formula di trasformazione. Spiega perche' i controllori discretizzati con questo metodo presentano una distorsione in frequenza rispetto al controllore continuo di partenza e illustra il metodo della compensazione con prewarping.

2- Disegna il diagramma di Nyquist completo per il seguente sistema

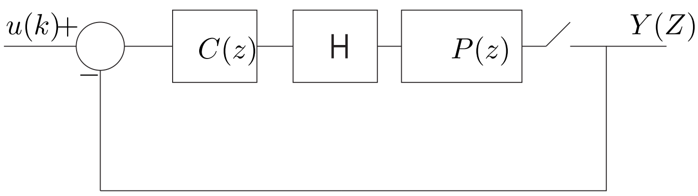
$$P(z) = \frac{2-z}{(z-1)(z+2)}$$

servendoti della trasformazione bilineare $z = \frac{1+w}{1-w}$. Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k



- trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato,
- determina il valore del guadagno k che rende massimo il margine di ampiezza M_a del sistema.

3- Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(s) = \frac{1}{s-a},$$

assumendo $a > 0$, in modo da avere una risposta al gradino di tipo deadbeat.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
Facendo la trasformata zeta dell'ingresso e dell'uscita otteniamo

$$U(z) = \frac{z}{(z-1)} \ , Y(z) = \frac{z}{2(z-1)(z-0.5)} \ ,$$

da cui la funzione di trasferimento è data da

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{2(z-0.5)}$$

la risposta all'impulso è l'antitrasformata zeta della funzione di trasferimento è data quindi da

$$h(k) = 0.5^k 1(k-1) \ ,$$

l'equazione alle differenze che descrive il sistema è data da

$$y(k) = 0.5y(k-1) + 0.5u(k-1) \ .$$

Domanda 4
Facendo la trasformata zeta dell'equazione otteniamo

$$X(z) = z^{-1}X(z) + \frac{z}{(z-1)^2} \ ,$$

da cui

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3} \ ,$$

usando la formula di inversione, considerando che abbiamo un polo triplo in 1, otteniamo

$$x(k) = \mathrm{Res}((, X)(z)z^{k-1}, 1) = \frac{1}{2!}\frac{d^2 z^{k+1}}{dz^2} = \frac{(k+1)k}{2} \ ,$$

applicando la formula a $k = 100$, otteniamo

$$\sum i = 1^{100} k = (101 \cdot 100)/2 = 5050 \ .$$

Domanda 5
L'equivalente discreto della serie del filtro di hold e del sistema continuo è dato da

$$P(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{e^{-2s}}{s+a}] = \frac{z^{-2}}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \ ,$$

il guadagno di anello è pari a

$$L(z) = P(z)C(z) = \frac{k}{z^2(z-1)} \ ,$$

l'equazione caratteristica è data da

$$1 + L(z) = 1 + \frac{k}{z^2(z-1)} = 0 \rightarrow z^3 - z^2 + k = 0 \ ,$$

poniamo $q(z) = z^3 + z^2 + k$
le condizioni necessarie sono

$$1)\ 1 > |k| \leftarrow |k| < 1 \ ,$$

$$2)\ q(1) > 0 \leftarrow k > 0 \ ,$$

$$3)\ q(-1) < 0 \leftarrow k > -2 \ ,$$

costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	k	0	-1	1
2	1	-1	0	k
3	k^2-1	1	$-k$	

la quarta condizione è dunque

$$|k^2 - 1| > |-k|$$

risolvendo questa condizione per via grafica, otteniamo $k < 0.618$ oppure $k > 1.618$,
facendo l'intersezione delle condizioni trovate, otteniamo

$$k \in (0, 0.618) \ .$$

Parte B

2-
Nella variabile w il sistema è dato da

$$P_w(w) = 1/6 \frac{(1-w)(1-3w)}{w(1-1/3w)} \ ,$$

il sistema è di tipo 1 e presenta un asintoto verticale per

$$\sigma = 1/6(-1-3+1/3) = -23/36 \ ,$$

inoltre abbiamo $\lim_{\omega_w \to \infty} P_w(j\omega_w) = -1.5$, per trovare le intersezioni con l'asse reale, consideriamo l'equazione

$$\eta + P_w(w) = 0 \rightarrow 6\eta w(1-1/3w) + (1-w)(1-3w) = 0$$

da cui otteniamo

$$w^2(3-2\eta) + w(6\eta - 4) + 1 = 0 \ ,$$

poniamo uguale a zero il coefficiente del termine di primo grado, ottenendo

$$\eta = 2/3 \ ,$$

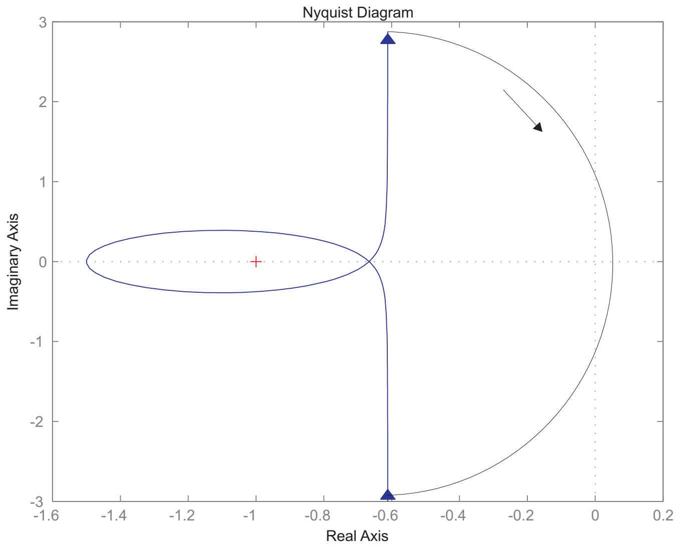
sostituendo questo valore di η nell'equazione, otteniamo

$$w^2(5/3) = -1 \ ,$$

che ha radici immaginarie, quindi il diagramma di nyquist attraversa l'asse reale in $-\eta = -2/3$.

La funzione $P(z)$ ha un polo all'interno del contorno di Nyquist, il diagramma di Nyquist compie quindi un giro in senso antiorario attorno all'origine.

Il diagramma complessivo è quindi il seguente



il sistema è asintoticamente stabile se il punto $-1/k$ viene circondato una sola volta in senso antiorario l'insieme dei valori di k per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile si trova risolvendo la disequazione

$$-1.5 < -\frac{1}{k} < -2/3$$

da cui

$$k \in (2/3, 1.5) \ ,$$

il massimo margine di ampiezza lo otteniamo ponendo

$$\frac{k}{2/3} = \frac{3/2}{k},$$

da cui

$$k = 1,$$

e corrisponde a $M_a = 3/2$.

4- La funzione di trasferimento corrispondente alla serie del filtro di hold e di $P(s)$ è data da

$$P(z) = \mathcal{Z}[H(s)P(s)] = \frac{1}{a}\frac{1 - e^{aT}}{z - e^{aT}} \ ,$$

questo sistema non presenta ne' zeri ne' poli stabili.

Per avere errore nullo al gradino consideriamo un controllore del tipo

$$C(z) = \frac{S(z)}{(z-1)R'(z)} \ ,$$

la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita risulta

$$T(z) = \frac{P(z)C(z)}{1+P(z)C(z)} \ ,$$

l'equazione caratteristica è data da

$$(1-e^{aT})S(z) + a(z-e^{aT})(z-1)R'(z)$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 3$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 1$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 1 = \mathrm{Gr}[S]$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 0$,

quindi poniamo, per avere una risposta di tipo deadbeat

$$(1-e^{aT})(s_1 z + s_0) + a(z-e^{aT})(z-1)r_0 = z^2 \ ,$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{array}{l} ar_0 = 1 \ , \\ (1-e^{aT})s_1 - a(e^{aT}+1)r_0 = 0 \ , \\ (1-e^{aT})s_0 + ae^{aT}r_0 = 0 \end{array}$$

da cui

$$r_0 = \frac{1}{a}, \ s_0 = -\frac{e^{aT}}{1-e^{aT}} \ , s_1 = \frac{e^{eT}+1}{1-e^{aT}} \ .$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z) = a\frac{z\frac{e^{eT}+1}{1-e^{aT}} - \frac{e^{aT}}{1-e^{aT}}}{z-1} \ .$$