Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'11 Novembre 2005

Parte A-I

1- Definisci i concetti di stabilità semplice, stabilità asintotica e stabilità ingresso limitato-uscita limitata per un sistema discreto.

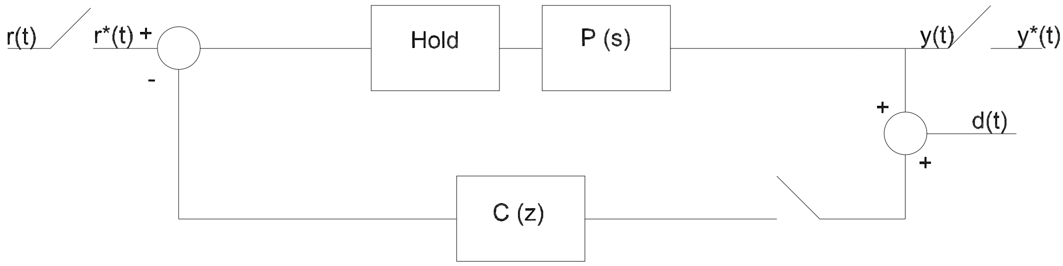
2- Elenca tutti i metodi che conosci per studiare la stabilità asintotica di un sistema discreto.

3- Descrivi in dettaglio il metodo basato sulla tabella di Jury.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'11 Novembre 2005

Parte A-II

1- Considera il seguente sistema, in cui $u(t)$ rappresenta l'ingresso e $d(t)$ rappresenta un disturbo.



con

$$C(z) = K\frac{z - e^{-2T}}{z} \ , \ P(s) = \frac{2}{s+2} \ , \ T = 1 \text{ s} \ ,$$

- calcola la funzione di trasferimento $T(z)$ tra l'ingresso campionato $r^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$,
- calcola l'insieme dei valori per $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è stabile,
- calcola la funzione di trasferimento $W(z)$ tra il disturbo campionato $d^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$,
- posto $K = 1$, calcola l'uscita a regime del sistema quando $r(t) = 1(t)$ e $d(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$.

2- Il signor Rossi ha un conto in banca, il cui valore mese per mese è rappresentato da una sequenza $x(k)$. Il capitale depositato si rivaluta ogni mese secondo un fattore a, la sequenza $u(k)$ rappresenta la quantità di denaro che il signor Rossi ritira dal conto ogni mese. L'andamento del denaro depositato nel tempo può essere descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$\begin{aligned} &x(k+1) = ax(k) - u(k) \\ &x(0) = x_0 \ , \end{aligned}$$

dove x_0 rappresenta il capitale iniziale. Determinare

- la sequenza $x(k)$, assumendo che il signor Rossi ritiri ogni mese una quantità costante di denaro pari a U.
- il capitale massimo U_{max} che il signor Rossi può prelevare tutti i mesi, uguale mese per mese, evitando che il conto si estingua.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'11 Novembre 2005

Parte B-I

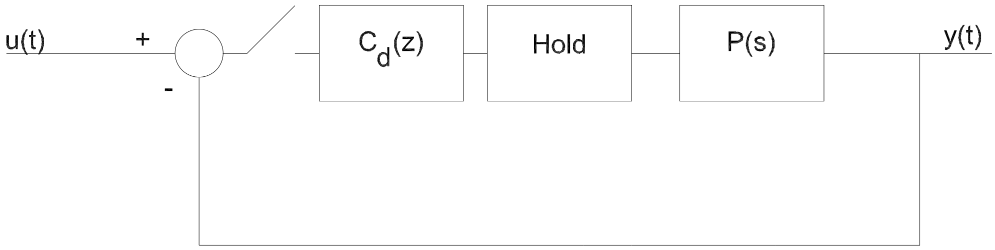
1- Illustra il metodo di discretizzazione basato sulla trasformazione di Tustin, discutendo la stabilità dei controllori discreti ottenuti con questo metodo.

2- Illustra la tecnica di correzione per prewarping della funzione di risposta armonica dei controllori ottenuti con la trasformazione di Tustin.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'11 Novembre 2005

Parte B-II

Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{(3-s)(s+20)}{20s(s+3)}\ ,\ C(s) = k\frac{1+\tau s}{1+\tau\alpha s}$$

tieni conto che nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considera un tempo di campionamento $T = 1s$.

a- Determina la costante K che consente un errore a regime in risposta alla rampa pari a $\frac{1}{2}$.

b- Traccia il diagramma di Nyquist del sistema continuo, senza la rete anticipatrice ma tenendo conto del guadagno K.

c- Calcola il margine di fase.

d- Progetta il controllore continuo $C(s)$ che consenta di avere un margine di fase pari a $M_f = 30°$.

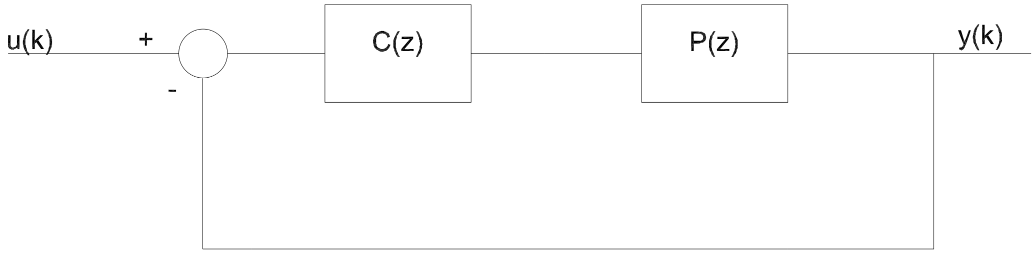
e- Discretizza il controllore trovato attraverso il metodo della corrispondenza poli-zeri.

f- Discuti se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

Parte B-III

Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema in modo tale che

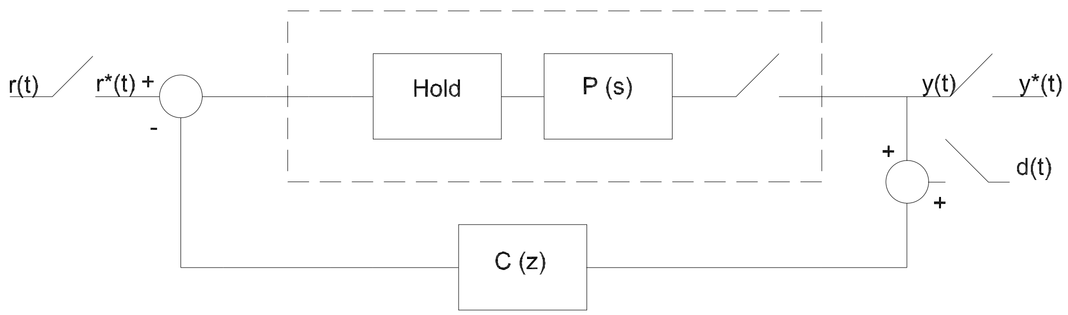
- il sistema presenti errore a regime nullo in risposta alla rampa
- la funzione di trasferimento del sistema retroazionato contenga due poli in $z = 0$ e uno in $z = 0.1$



Con

$$P(z) = \frac{z}{(z-2)(z+0.5)} \; .$$

Soluzione:
Parte A-II
1-
a-
Il sistema può essere scomposto nel seguente modo,



la funzione di trasferimento del blocco tratteggiato è data da

$$L(z) = \frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[\frac{2}{s+2}] = \frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}} \ ,$$

da cui

$$T(z) = \frac{\frac{1-e^{-2T}}{z-e^{-2T}}}{1+K\frac{1-e^{-2T}}{z}} = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-e^{-2T})(z+K(1-e^{-2T})} \ .$$

Il sistema è stabile quando il termine $z+K(1-e^{-2T})$ ha la sua radice all'interno del cerchio unitario, cioè quando $|K| < \frac{1}{1-e^{-2T}}$.

Invece

$$W(z) = \frac{-K\frac{1-e^{-2T}}{z}}{1+K\frac{1-e^{-2T}}{z}} = -K\frac{1-e^{-2T}}{z+K(1-e^{-2T})},$$

Poniamo $k = 1$, l'uscita a regime sarà la somma dei contributi relativi all'ingresso e al disturbo, per l'ingresso otteniamo

$$Y(z) = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-e^{-2T})(z+(1-e^{-2T})}\frac{z}{z-1}$$

a regime

$$\lim_{k\to\infty} y^*(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \frac{1}{2-e^{-2T}} = 0.5363 \ ,$$

per il disturbo abbiamo che $W(e^{j\omega T}) = W(j) = -\frac{1-e^{-2T}}{j+(1-e^{-2T})} = 0.6541e^{2.2837j}$, da cui il contributo a regime del disturbo è $0.6541\sin(\frac{\pi}{2}k+2.2837)$ e l'uscita a regime è

$$y*_\infty(k) = 0.5363 + 0.6541\sin(\frac{\pi}{2}k+2.2837) \ .$$

2- Facendo la trasformata zeta dell'equazione, otteniamo

$$X(z) = \frac{-U\frac{z}{z-1}+zx_0}{z-a} = \frac{z(x_0(z-1)-U)}{(z-1)(z-a)}$$

antrasformando con il metodo dei residui, otteniamo

$$x(k) = -\frac{U}{1-a} + a^k \frac{x_0(a-1) - U}{a-1}$$

il valore massimo di U per cui il conto non si estingue si ottiene ponendo a zero il coefficiente del termine esponenziale, da cui

$$U = x_0(a-1) \ .$$

2- Il blocco costituito dalla serie dell'hold, di $P(s)$ e del campionatore è equivalente al sistema discreto

$$P(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}[\frac{1}{(s+5)s}] = \frac{1}{5} \frac{1-e^{-5T}}{z-e^{-5T}}$$

La funzione di trasferimento complessiva risulta dunque

$$T(z) = \frac{P(z)}{P(z)C(z)} = \frac{(1-e^{-5T})(z-0.5)}{5(z-0.5)(z-e^{-5T}) + z(1-e^{-5T})} = \frac{0.1986(z-0.5)}{(z-0.01135)(z-0.2956)} \ ,$$

il valore a regime in risposta al gradino è dato da

$$y_\infty = \lim z \to 1 \frac{z}{z-1} T(z)(z-1) = T(1) = \frac{1}{7} \ ,$$

il polo dominante è $z = 0.2956$, dalla relazione $s = \frac{1}{T} \log(z) = -1.215$, abbiamo che $T_a = \frac{3}{1.215} \simeq 2.469$ s,considerando l'istante di campionamento immediatamente successivo, possiamo stimare $T_a =\simeq 3$ s.

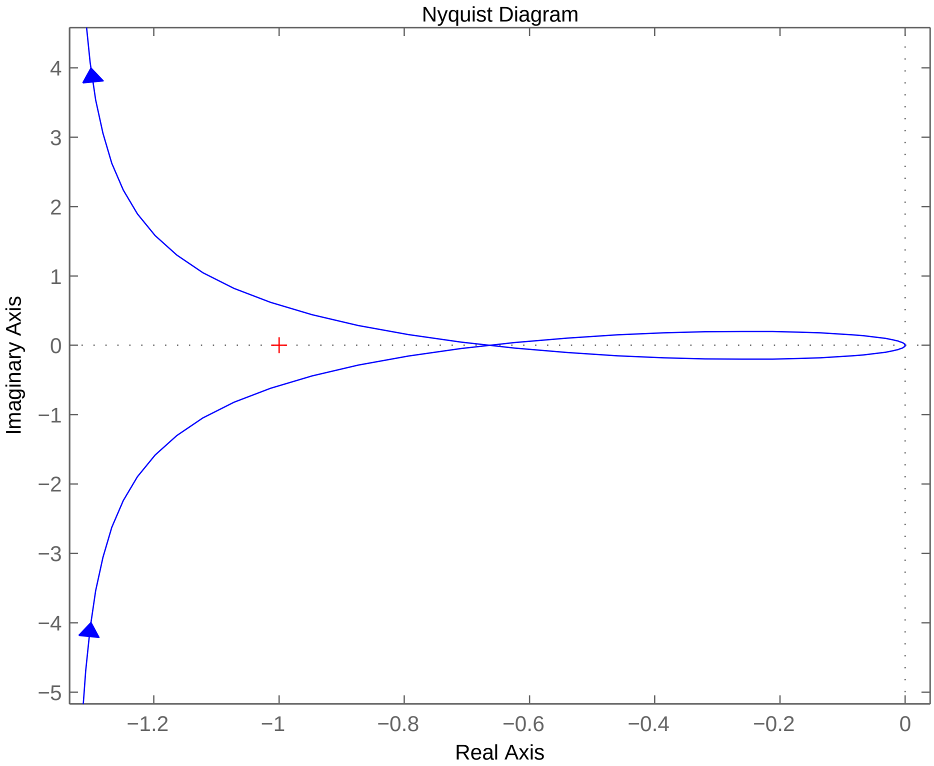
Parte B-II Il ritardo finito è approssimato da

$$H(s) = \frac{20}{20+s};$$

il guadagno ad anello aperto del sistema, senza la rete correttrice, è

$$L(s) = H(s)P(s) = \frac{(3-s)}{s(s+3)}$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che $\frac{1}{2} = \frac{1}{K_v}$ e quindi $k = 2$, tracciamo il diagramma di Nyquist di $L_2(s) = kL(s)$,



l'intersezione con il cerchio unitario si trova ponendo $|L_2(j\omega_c)| = 1$, da cui $\omega_c = 3$, inoltre $\arg(L_2(j\omega_c)) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan(\frac{1}{2})$, da cui $M_f = 22.6°$.

Per progettare la rete anticipatrice prendiamo $\omega_0 > \omega_c$, ad esempio $\omega_0 = 2.5$, da cui

$$\phi = \frac{\pi}{6} - \pi - \arg(P(2.5j)) = 0.3423,\ M = \frac{1}{|P(2.5j)|} = 1.25$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \rightarrow 0.9420 > 0.8$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 0.3671$ e $\alpha = 0.4610$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 2\frac{1 + 0.3671s}{1 + 0.1692s} = 4.3384\frac{s + 2.724}{s + 5.909}\ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri è dato da

$$C_d(z) = \frac{3.742z - 2.85}{z - 0.5538}\ .$$

Per quanto riguarda la correttezza del tempo di campionamento, abbiamo che il lo zero o polo piu' veloce del controllore è in -5.909, da cui deriva la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{3}\frac{1}{5.909} = 0.1772s$$

che risulta verificata, il tempo di campionamento è dunque sufficientemente piccolo.

Parte B-III

Abbiamo che

$$B^+ = z,\ B^- = 1,\ A^+ = (z + 0.5),\ A^- = (z - 2),$$

per avere errore nullo alla rampa occorre porre $q = 2$. Poniamo

$$R(z) = R''(z)(z-1)^2 B^+,\ S(z) = S'(z)A^+(z),$$

i gradi sono dati da

$$\mathrm{gr}\{S'\} = \mathrm{gr}\{A^-\} + q - 1 = 1 + 2 - 1 = 2,\ \mathrm{gr}\{R''\} = \mathrm{gr}\{A\} - \mathrm{gr}\{B^+\} - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

l'equazione diofantea per il progetto di ragazzini diventa

$$r_0(z-1)^2(z-2) + (s_2 z^2 + s_1 z + s_0) = z^2(z - 0.1),$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ -4r_0 + s_2 = -0.1 \\ 5r_0 + s_1 = 0 \\ -2r_0 + s_0 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$r_0 = 1,\ s_2 = 3.9,\ s_1 = -5,\ s_0 = 2$$

il controllore cercato è quindi

$$C(z) = \frac{(z - 0.2)(3.9z^2 - 5z + 2)}{z(z-1)^2}\ .$$