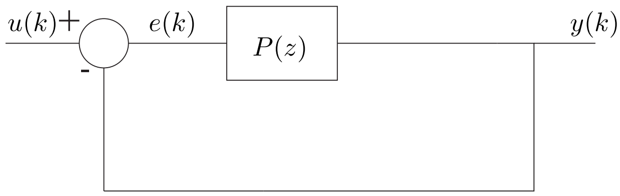
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 12 Febbraio 2007
Parte A

1- Presenta e dimostra la formula della trasformata zeta della convoluzione discreta.

2- Illustra i concetti di stabilità semplice, asintotica e ingresso-limitato uscita-limitata per un sistema discreto. Fai l'esempio di un sistema semplicemente stabile, ma non asintoticamente.

3- Considera il seguente schema

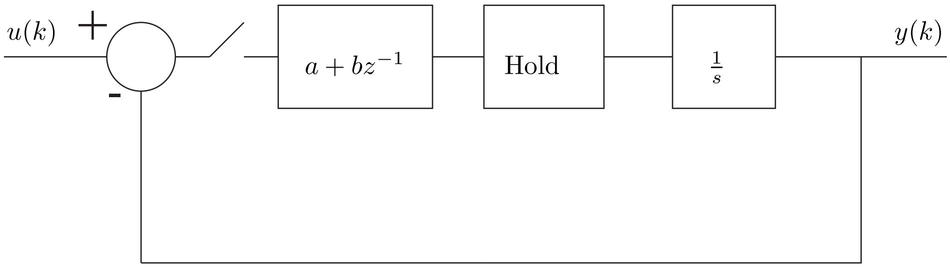


in cui il sistema $P(z)$ è descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k+2) - y(k+1) = e(k+1) + e(k) \ .$$

a- Determina la funzione di trasferimento $T(z)$ del sistema.
b- Determina l'uscita $y(k)$ del sistema corrispondente al gradino unitario in ingresso e tracciane il grafico.

4- Considera il seguente sistema,

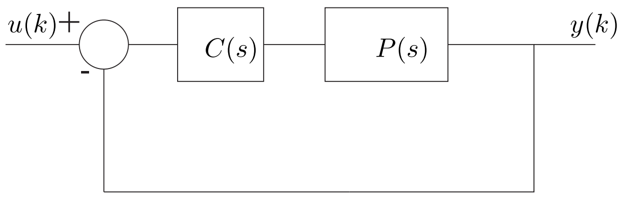


a- Determina la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema
b- Determina l'insieme dei valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile e rappresenta tale regione sul piano (a, b).

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 12 Febbraio 2007
Parte B

1- Illustra i metodi di discretizzazione per invarianza all'impulso, al gradino e alla rampa, dimostrando le formule presentate. Applica i tre metodi alla discretizzazione del sistema $P(s) = \frac{a}{s+a}$, $a > 0$.

2- Considera il seguente sistema a tempo continuo,



con

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} \ .$$

a- Determina una rete ritardatrice di forma

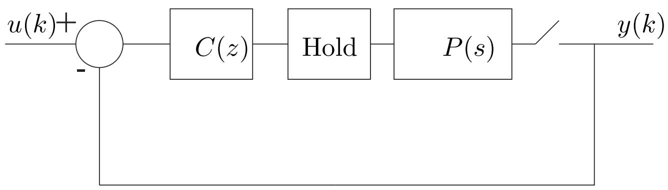
$$C(s) = k\frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1} \ ,$$

in modo tale da soddisfare alle specifiche

- errore a regime alla rampa pari a 1/10
- margine di ampiezza pari a 4 .

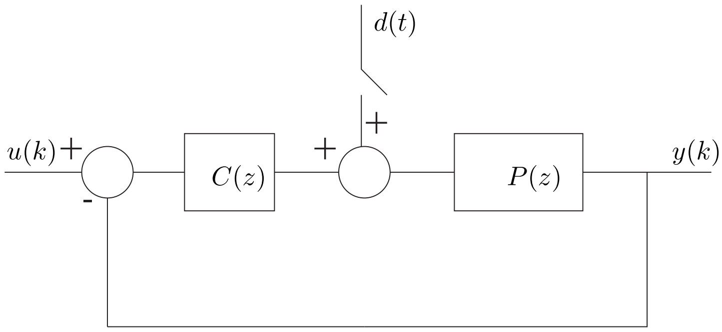
Nota: In questa prima parte dell'esercizio NON tenere conto del ritardo associato al tempo di campionamento, che sara' considerato nel punto b.

b- Considera ora il corrispondente schema di controllo a tempo discreto:



Determina il controlore $C(z)$ discretizzando il controllore continuo mediante la regola della corrispondenza poli-zeri e scegliendo il tempo di campionamento T in modo tale che alla pulsazione critica in cui il diagramma di Nyquist attraversa l'asse reale, il ritardo di fase introdotto del filtro di hold nell'anello di controllo sia pari ad 1 grado. (Nota che in questo modo l'effettiva riduzione del margine di fase sarà minore di un grado, visto che l'attraversamento del cerchio unitario avviene ad una pulsazione più bassa).

3- Progetta il controllore $C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema



con $d(t) = \sin(10t)$,$P(z) = \frac{(z-0.5)}{z^2}$ e $T = \frac{\pi}{20}$, in modo tale che il sistema retroazionato abbia tutti i poli nell'origine e il disturbo $D(k)$ non dia contributo sull'uscita a regime.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a- Facendo la trasformata zeta dell'equazione alle differenze, otteniamo

$$z(z-1)Y(z) = (z+1)E(Z) \ ,$$

da cui

$$P(z) = \frac{z+1}{z(z-1)} \ ,$$

la funzione di trasferimento ad anello chiuso è data da

$$T(z) = \frac{P(z)}{1+P(z)} = \frac{z+1}{z^2+1}$$

considerando il segnale in ingresso $U(Z) = \frac{z}{z-1}$, abbiamo che

$$Y(Z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2+1)} \ ,$$

antitrasformando con il metodo dell'integrale di inversione, otteniamo

$$y(k) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2}k) \ .$$

Domanda 4

L'equivalente discreto del sistema continuo preceduto dall'hold è dato da

$$P(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}] = \frac{T}{z-1} \ ,$$

il guadagno d'anello è quindi

$$L(z) = \frac{T(az+b)}{z(z-1)} \ ,$$

e l'equazione caratteristica è data da

$$q(z) = 1 + L(z) \rightarrow z(z-1) + T(az+b) = z^2 + z(Ta-1) + bT \ ,$$

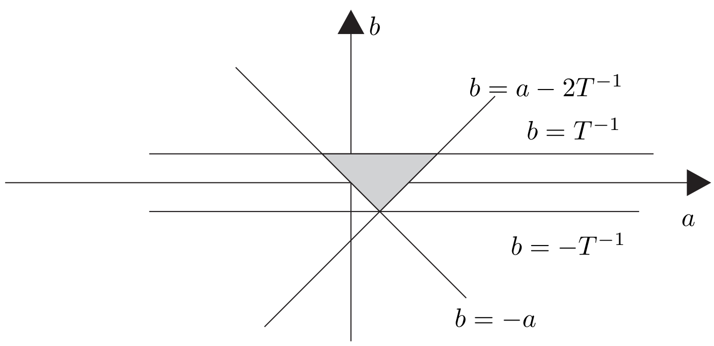
valutiamo la stabilità attraverso il criterio di Jury, occorre

$$1 > |bT| \rightarrow |b| < T^{-1} \ ,$$

$$q(1) > 0 \rightarrow T(a+b) > 0 \rightarrow b > -a \ ,$$

$$q(-1) > 0 \rightarrow 2 + T(b-a) > 0 \rightarrow b > a - 2T^{-1} \ ,$$

mettendo a sistema queste tre condizioni, otteniamo la regione rappresentata in figura



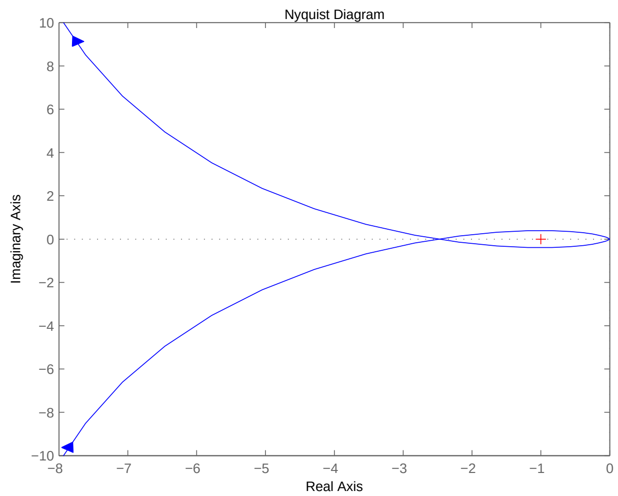
Parte B

2-

a- Il guadagno K si determina tramite la relazione

$$\frac{1}{\lim_{s\to} sKP(s)} = 1/10 \leftarrow K = 40 \; .$$

Il diagramma di Nyquist di $KP(s)$ è riporato in figura



che va completato con un semicerchio in senso antiorario (l'origine infatti non è circondata dal diagramma di nyquist in quanto $KP(s)$ non ha poli o zeri a parte reale positiva). L'asintoto verticale avviene in $\sigma = -10$. Per trovare l'intersezione con l'asse reale poniamo

$$-\frac{\pi}{2} - 2\arctan(2\omega_0) = -\pi \rightarrow \omega_c = 2 \; ,$$

infine $KP(2j) = -5/2$, il sistema non compensato è dunque instabile.

Per la rete ritardatrice, scegliamo $\omega_0 = 1$, da cui $M = 4|P(j)| = 32$, $\phi = \pi + \arg(P(j)) = 0.6435$. La condizione $M\cos\phi > 1$ è verificata. Dalle formule di inversione otteniamo $\tau = 52$, $\alpha = 0.0246$. Il controllore è dunque

$$C(s) = 40\frac{1.281s + 1}{52s + 1} \; .$$

b-

Il ritardo introdotto dal filtro di hold è dato da $T/2$, la cui trasformata di Laplace è $e^{-sT/2}$. Il ritardo di fase introdotto alla pulsazione critica ω_0 è dato da $\omega_0 T/2 = T/2$. Vogliamo che tale ritardo sia pari ad un grado, quindi

$$\frac{\pi}{180} = 0.46T/2 \rightarrow T = 0.0349s \; .$$

Discretizzando il controllore con la corispondenza poli-zeri si ottiene

$$C(z) = 0.99873\frac{z - 0.9731}{z - 0.9993} \; .$$

4- Innanzitutto poniamo $S(z) = S'(z)z^2$, $R(z) = (z - 0.5)R'(z)$ per effettuare le cancellazioni dei poli e degli zeri stabili. La funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita è data da

$$T_d^y = \frac{P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{(z - 0.5)R'(z)}{R'(z) + S'(z)}$$

mentre la trasformata del disturbo è $D(z) = \frac{z}{z^2+1}$. In modo che asintoticamente il disturbo non dia contributo sull'uscita occorre che R' contenga il termine $z^2 + 1$, quindi poniamo $R' = R''(z^2 + 1)$. A questo punto l'equazione caratteristica diventa

$$R''(z^2 + 1) + S'$$

che uguagliamo ad un polinomoio del tipo z^l, in modo da avere tutti i poli nell'origine. Imponendo il numero di equazioni uguale al numero delle incognite, otteniamo $\mathrm{Gr}[R]'' = 0$, $\mathrm{Gr}[S]' = 1$ e

$$z_0(z^2 + 1) + s_1 z + s_0 = z^2 \ ,$$

da cui $z_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_0 = -1$. Il controllore cercato è dunque

$$C(z) = \frac{-z^2}{(z - 0.5)(z^2 + 1)} \ .$$