Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 12 Giugno 2006
Parte A

1- Definisci la convoluzione di due segnali discreti $a(k)$ e $y(k)$. Dimostra che

$$\mathcal{Z}[a(k) \star y(k)] = \mathcal{Z}[a(k)]\mathcal{Z}[b(k)] \ .$$

2- Definisci il concetto di equivalente discreto di un sistema continuo $P(s)$ e dimostra che questo è dato da

$$P(z) = \mathcal{Z}[p(kT)] \ ,$$

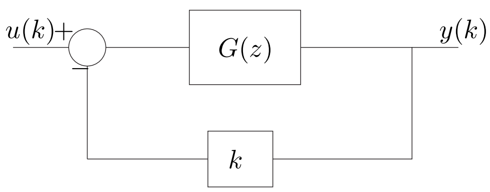
dove $p(t)$ è la risposta all'impulso di $P(s)$. Elenca inoltre i metodi che conosci per il suo calcolo.

3- Determina la *funzione di trasferimento* e la *risposta all'impulso* di un sistema discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(k) = -y(k-2) + u(k)$$

e disegna il grafico della risposta all'impulso. Quali sono i modi del sistema?

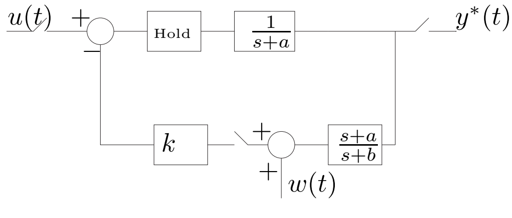
4- Usando il metodo della tabella di Jury, determina l'insieme dei valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema discreto è asintoticamente stabile



con

$$G(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} \ .$$

5- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(t)$ e l'uscita $y^*(t)$ e quella tra il disturbo campionato $w^*(t)$ e l'uscita $y^*(t)$. Determina infine il valore dell'uscita a regime quando $u(t) = 1$ e $w(t) = 0.1$, per $k = 1$. Le costanti a, b sono tali che $|a| < 1$, $|b| < 1$



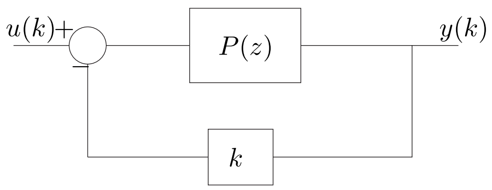
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 12 Giugno 2006
Parte B

1- Illustra i metodi di discretizzazione alle differenze all'avanti, in indietro e di Tustin, ricavando le espressioni delle trasformazioni e discuti la stabilità dei controllori ottenuti.

2- Disegna il diagramma di Nyquist completo per il seguente sistema

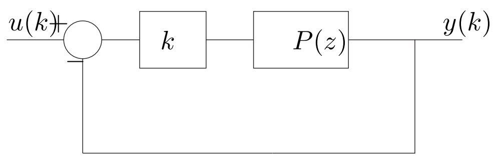
$$P(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2}$$

servendoti della trasformazione bilineare $z = \frac{1+w}{1-w}$. Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k



e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato.

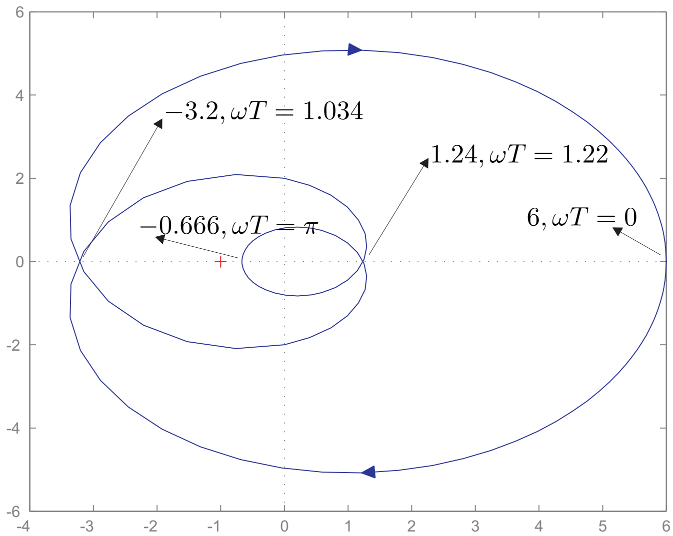
3- Considera il seguente sistema discreto



in cui

$$P(z) = \frac{(z+2)}{z^2(z-0.5)} \ ,$$

il diagramma di Nyquist per $P(z)$ è il seguente

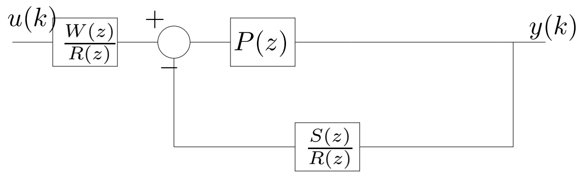


trova un controllore $C(z)$, in modo tale da avere guadagno statico $K_s = 12$ e margine di ampiezza $M_a = 2$, progettando nel piano w una rete ritardatrice del tipo

$$C_w = k\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w} \ .$$

Nota: usate le formule di inversione, ma fate attenzione riguardo alla scelta della pulsazione ω_0, in quanto le pulsazioni ω_w del diagramma di Nyquist sul piano w sono diverse da quelle ω_z del piano z. In particolare vale la relazione $\omega_w = \tan\frac{\omega_z T}{2}$.

4- Determinare i polinomi $S(z)$, $R(z)$ e $W(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{z-0.8}{(z-0.2)(z-1)} \ ,$$

in modo che l'uscita sia una copia ritardata di un campione dell'ingresso (funzione di trasferimento pari a z^{-1}) e che $R(z)$ presenti un polo in $z = 1$.

Soluzione:
Parte A
Domanda 3
Facendo la trasformata zeta otteniamo

$$Y(z) = -z^{-2}Y(z) + U(z)$$

da cui la funzione di trasferimento è data da

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2+1} \ ,$$

la risposta all'impulso è l'antitrasformata zeta della funzione di trasferimento è data quindi da

$$h(k) = \sum \mathrm{Res}(H(z)z^{k-1}, =)\frac{1}{2}((-j)^k + j^k) = \cos(\frac{\pi}{2}k) \ .$$

Domanda 4
La funzione di trasferimento è

$$T(z) = \frac{1}{k + z^2(z-1)}$$

l'equazione caratteristica è data quindi da

$$q(z) = k + z^2(z-1) = z^3 - z^2 + k \ ,$$

le condizioni necessarie sono

$$1) \ 1 > |k| \leftarrow k \in (-1, 1) \ ,$$

$$2) \ q(1) > 0 \leftarrow k > 0 \ ,$$

$$3) \ q(-1) < 0 \leftarrow k < 2 \ ,$$

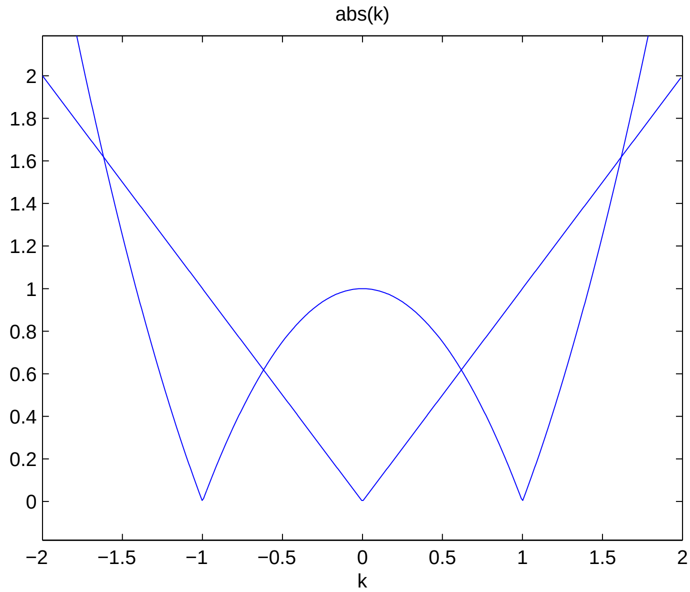
dalle prime tre condizioni otteniamo $k \in (0, 1)$, costruiamo la tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	k	0	-1	1
2	1	-1	0	k
3	k^2-1	1	$-k$	

la quarta condizione è dunque

$$|k^2 - 1| > |-k|$$

disegnamo il grafico delle due funzioni $|1 - k^2|$ e $|k|$



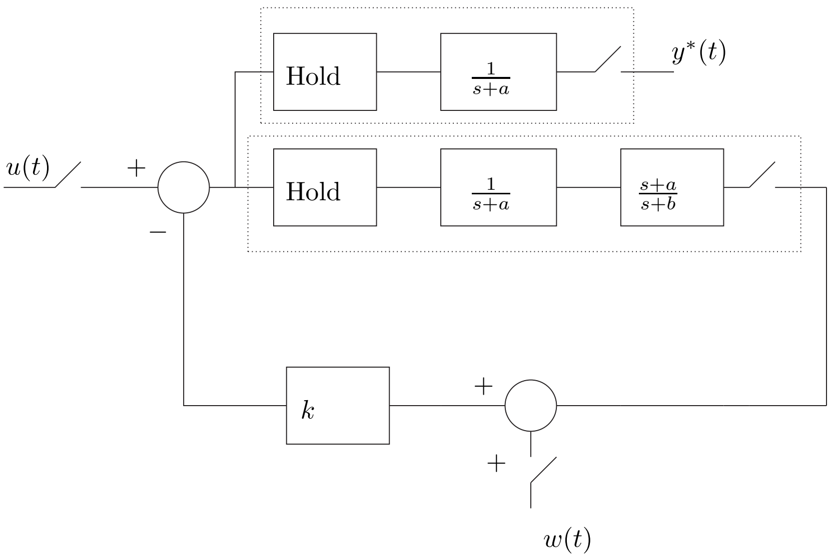
l'unica regione in cui la disequazione è verificata, all'interno dell'intervallo $(0, 1)$ è data da $(0, k^*)$ calcoliamo k^* come intersezione tra le funzioni $1 - k^2 1$ e k, ottenendo

$$k^* = 0.5(\sqrt{5} - 1)) = 0.618 ,$$

quindi il sistema è asintoticamente stabile per $k \ \in (0, 0.618)$.

Domanda 5

Possiamo trasformare lo schema in questo modo



abbiamo che

$$\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+a}] = \frac{1}{a}\frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} ,$$

$$\mathcal{Z}[H(z)\frac{1}{s+a}\frac{s+a}{s+b}] = \frac{1}{b}\frac{1-e^{-bT}}{z-e^{-bT}} ,$$

la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+a}]}{1+k\mathcal{Z}[H(z)\frac{1}{s+a}\frac{s+a}{s+b}]} = \frac{(1-e^{-aT})b(z-e^{-}bT)}{(b(z-e^{-bT})+k(1-e^{-bT}))a(z-e^{-aT})} ,$$

quella tra disturbo e uscita è data da

$$W(z) = -kT(z) ,$$

per calcolare l'uscita a regime usiamo il teorema del valore finale, sommando i contributi sull'uscita dati dal segnale e dal disturbo, abbiamo che

$$y_\infty = (z-1)T(z)\frac{z}{z-1}|_{z=1} + W(z)(z-1)\frac{z}{z-1}|_{z=1}0.1 = 0.9\frac{b}{a(b+1)} .$$

Parte B

2-

Nelle coordinate w il sistema è dato da

$$P_w(w) = \frac{(1-w)^2}{(0.5+1.5w)^2} ,$$

abbiamo $P_w(0) = 4$, $\lim_{\omega_w\to\infty} P_w(j\omega_w) = 4/9$, inoltre

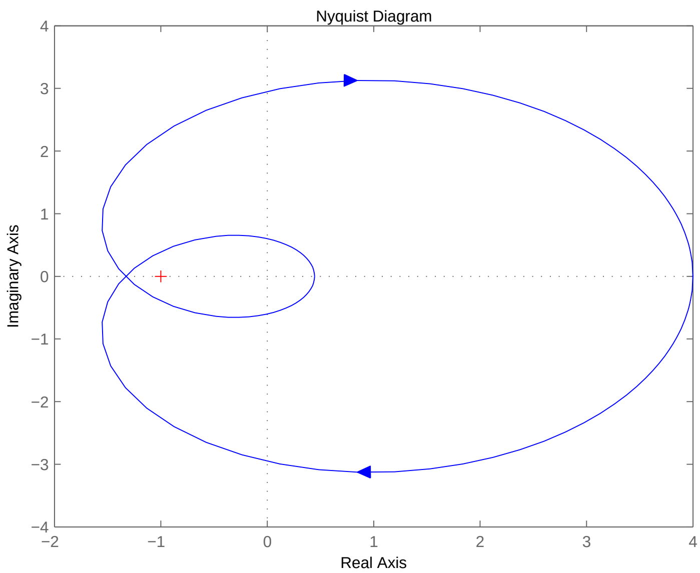
$$\arg P_w(j\omega_w) = -2\arctan\omega_w - 2\arctan(3\omega_w) ,$$

da cui abbiamo che il diagramma di Nyquist compie un giro in senso antiorario. L'intersezione con l'asse reale si ottiene dal polinomio

$$\eta + P_w(w) \to w^2(2.25\eta+1) + w(1.5\eta-2) + 0.25\eta + 1$$

per avere due radici immaginare, poniamo il coefficiente di primo grado pari a 0, da cui $\eta = 4/3$, che corrisponde ad un intersezione con l'asse reale per $z = -4/3$.

Il diagramma complessivo è quindi il seguente



l'insieme dei valori di k per cui il sistema retroazionato è asintoticamente stabile si trova risolvendo la disequazione

$$-\frac{1}{k} < -\frac{4}{3} \text{ o } -\frac{1}{k} > 4 \ ,$$

da cui

$$k \in (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \ .$$

3-

Il sistema nelle coordinate w è dato da

$$P_w(w) = \frac{(3-w)(1-w)^2}{(1+w)^2(0.5+1.5w)} \ ,$$

nelle coordinate w la pulsazione di attraversamento dell'asse immaginario è data da

$$\omega_c = \tan(0.5\omega_d T) = 0.569 \ .$$

Il guadagno statico del sistema $P(z)$ è dato da 6, quindi per soddisfare la prima specifica poniamo $k = 2$, a questo punto definiamo $L(w) = 2P_w(w)$ e calcoliamo la rete ritardatrice con le formule di inversione. Scegliamo $w_0 = 0.5$, otteniamo $M = |L(0.5j)|M_a = 13.49$, $\phi = \pi + \arg(L(0.5j)) = 0.1391$. La condizione $M \cos\phi = 13.3 > 1$ è soddisfatta. Applicando le formule di inversione, otteniamo

$$\alpha = 0.0733, \ \tau = 180.4 \ ,$$

che corrisponde al controllore

$$C_w(w) = 2\frac{1+13.22w}{1+180.4w} \ ,$$

il controllore sul piano z si trova applicando la trasformazione $w \to \frac{z-1}{z+1}$ ed è dato da

$$C = \frac{0.1567z - 0.1347}{z - 0.989} \ .$$

4- Cancelliamo i poli e gli zeri stabili, ponendo

$$W(z) = (z-0.2)W'(z) \ , R(z) = (z-0.8)R'(z) \ , S(z) = (z-0.2)S'(z) \ ,$$

$R(z)$ deve avere un polo in $z = 1$, quindi poniamo

$$R'(z) = (z-1)R''(z)$$

otteniamo la funzione di trasferimento

$$T(z) = \frac{W'(z)}{(z-1)^2R''(z) + S'(z)} \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $2 + \mathrm{Gr}[R]'' + 1$ e il numero di variabili è dato da $1 + \mathrm{Gr}[R]'' + \mathrm{Gr}[S]' + 1$, uguagliando queste due quantità otteniamo $\mathrm{Gr}[S]' = 1$. Per avere un controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[S] = \mathrm{Gr}[R]$, da cui

$$\mathrm{Gr}[S]' + 1 = \mathrm{Gr}[R]'' + 2,$$

per cui $\mathrm{Gr}[R]'' = 0$, quindi poniamo

$$T(z) = \frac{W'(z)}{(z-1)^2 r_0 + (s_1 z + s_0)} = \frac{z}{z^2} \ ,$$

in cui numeratore e denominatore sono stati moltiplicati per z per avere il denominatore dello stesso grado dell'equazione diofantea. Otteniamo

$$W' = z \ ,$$

e

$$z^2 r_0 + (s_1 - 2r_0)z + s_0 + r_0 = z^2$$

da cui

$$r_0 = 1 \ , s_1 = 2 \ , s_0 = -1 \ ,$$

i polinomi cercati sono quindi dati da

$$W(z) = (z - 0.2)z \ , R(z) = (z - 0.8)(z - 1), \ S(z) = (z - 0.2)(2z - 1) \ .$$