Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'13 Febbraio 2006

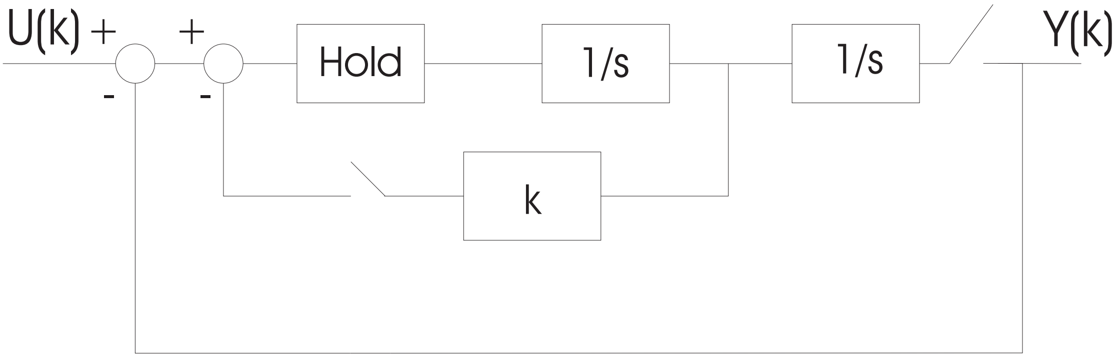
Parte A-I

Definisci la trasformata zeta per una successione $x(k)$.

Illustra il metodo basasto sulla formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta. Dimostra la formula presentata.

Parte A-II

1- Considera il seguente sistema, in cui $u(k)$ rappresenta l'ingresso, $y(k)$ rappresenta l'uscita e k è una costante di guadagno.



- trasforma il sistema dato in uno in cui compaiano solo segnali discreti
- calcola la funzione di trasferimento $T(z)$ tra l'ingresso campionato $u(k)$ e l'uscita $y(k)$
- calcola l'insieme dei valori per $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile, scegliendo il tempo di campionamento $T = 1s$.

Può essere utile la seguente relazione

$$\mathcal{Z}[\frac{1}{s^3}] = \frac{T^2}{2}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} .$$

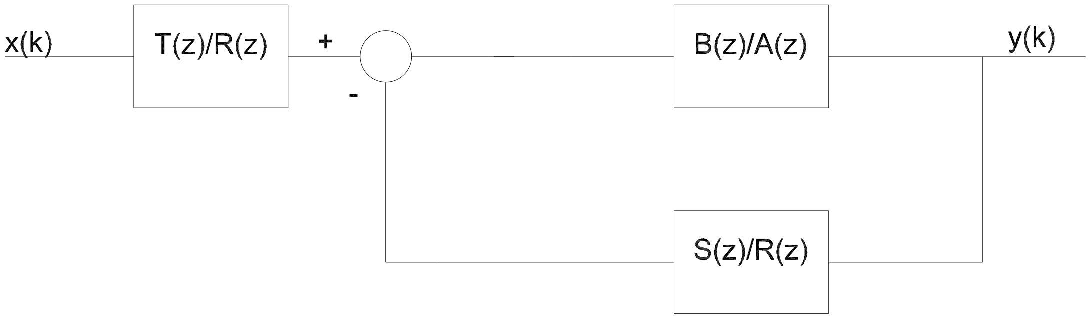
2- Calcola la risposta all'impulso per il seguente sistema usando il metodo dell'integrale di inversione.

$$P(z) = \frac{1}{z(z-2)^2}$$

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'13 Febbraio 2006

Parte B-I

Illustra il progetto analitico per il seguente sistema, in cui $\frac{B(z)}{A(z)}$ rappresenta l'impianto da controllare e $T(z)$, $R(z)$, $S(z)$ i polinomi del regolatore da determinare



il progetto deve prevedere la presenza di un'azione integrale di ordine q (q poli in 1) nel controllore e la cancellazione degli zeri stabili del sistema.

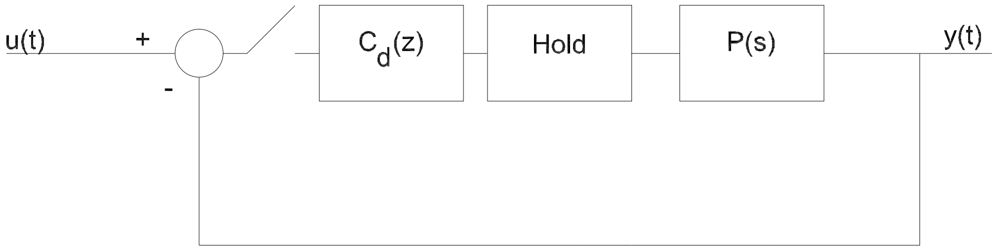
In particolare

- calcola la funzione di trasferimento complessiva del sistema
- presenta e giustifica le condizioni che deve rispettare la funzione di trasferimento $G_m(z)$ da imporre
- ricava l'equazione diofantea e trova i gradi minimi dei polinomi incogniti che consentono di risolverla.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'13 Febbraio 2006

Parte B-II

Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{20+s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \ , \ C(s) = k\frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s}$$

tieni conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considera un tempo di campionamento $T = 0.1s$.

a- Determina la costante k che consente di avere un errore a regime in risposta al gradino unitario pari a 1/10.

b- Traccia il diagramma di Nyquist del sistema continuo, senza la rete ritardatrice ma tenendo conto del guadagno K.

c- Calcola il margine di ampiezza.

d- Progetta il controllore continuo $C(s)$ che consenta di avere un margine di ampiezza pari a $M_a = 3$.

e- Discretizza il controllore trovato attraverso il metodo della corrispondenza poli-zeri.

f- Discuti se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'13 Febbraio 2006

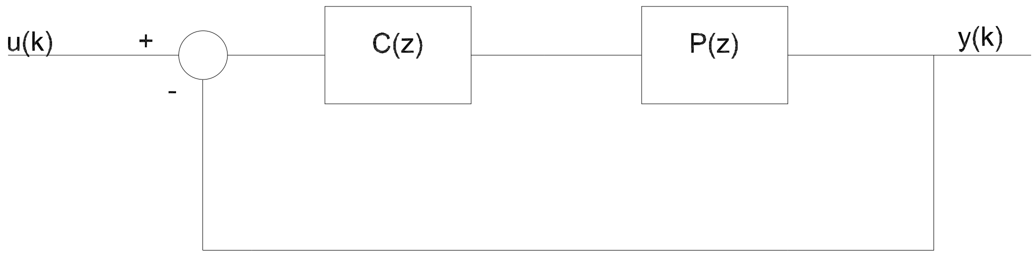
Parte B-III

Progetta un controllore $C(z)$ per il sistema rappresentato in figura, con

$$P(z) = \frac{z - 0.1}{(z+2)(z-1)} \, .$$

in modo tale che la risposta al gradino unitario sia di tipo deadbeat.

Determina inoltre l'uscita del sistema controllato in corrispondenza del gradino unitario in ingresso.

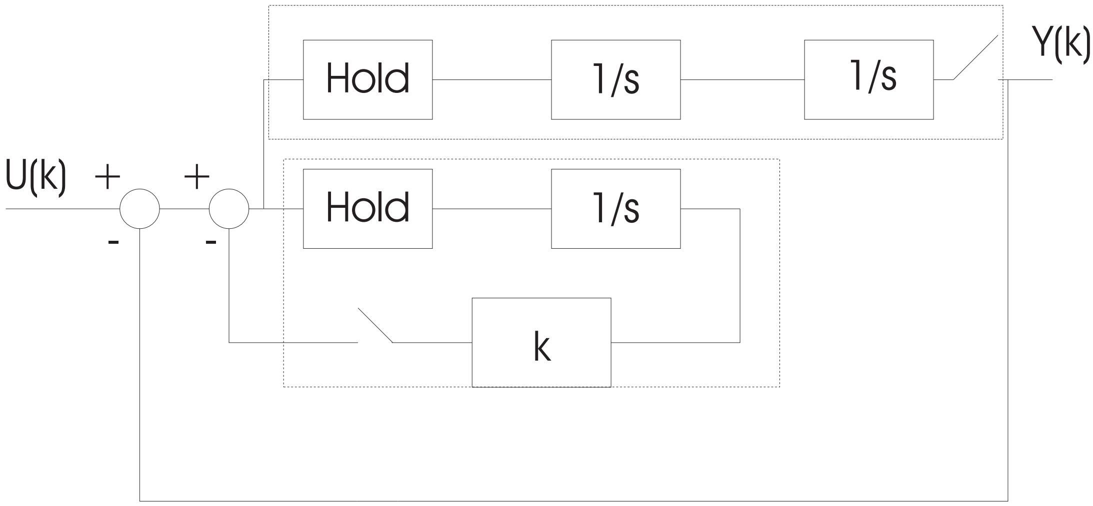


Soluzione:

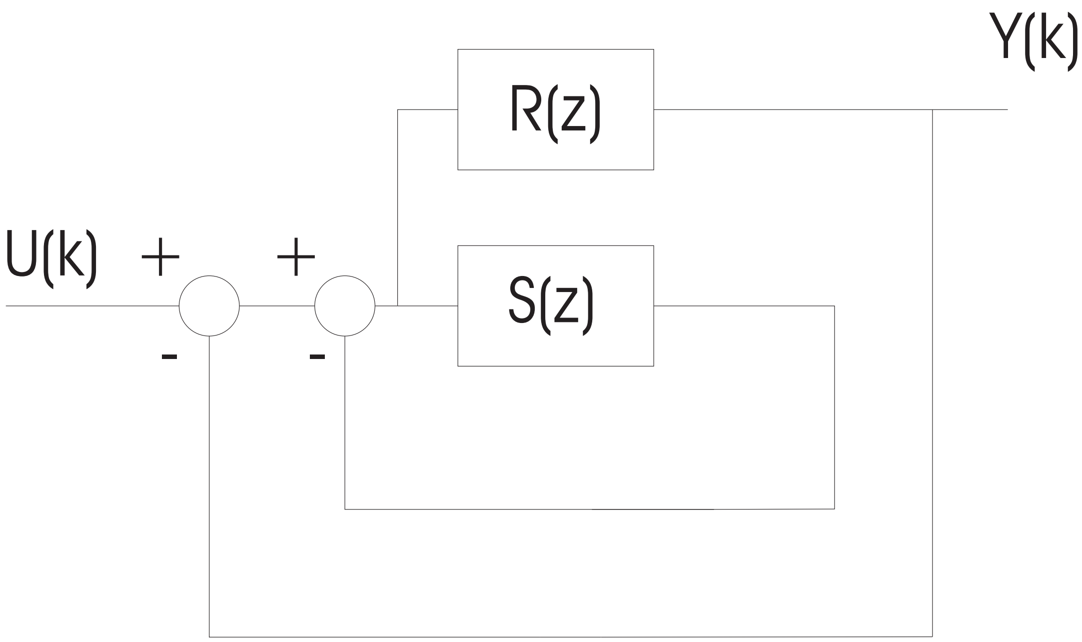
Parte A-II

1-

Il sistema può essere trasformato come segue



E può essere trasformato in uno schema completamente discreto nel seguente modo



dove

$$S(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2}] = k(1 - z^{-1})\frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}$$

e

$$R(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s^3}] = (1 - z^{-1})\frac{T^2}{2}\frac{(z+1)z}{(z-1)^3} = \frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{R(z)}{1 + S(z) + R(z)}.$$

L'equazione caratteristica è data da $1 + S(z) + R(z)$ ed ha come numeratore

$$2(z-1)^2+2kT(z-1)+T^2(z+1) = 0 \leftarrow 2z^2+z(T^2-4+2kT)+(2+T^2-2kT) = 0 \ \leftarrow z^2+z(-3/2+k)+(3/2-k)$$

applicando la tabella di Jury, otteniamo

$$\begin{array}{l} 1 > |3/2 - k| \leftarrow k \in (0.5, 2.5) \\ 1 - 1.5 + k + 1.5 - k > 0 \leftarrow 1 > 0 \text{ sempre} \\ 1 + 1.5 - k + 1.5 - k > 0 \leftarrow 4 - 2k > 0 \leftarrow k < 2 \end{array}$$

facendo l'intersezione delle regioni abbiamo che il sistema è asintoticamente stabile per $k \in [0.5, 2]$.

2- Facciamo l'antitrasformata zeta attraverso l'integrale di inversione

$$p(k) = \oint \frac{1}{z(z-1)^2} z^{k-1} dz =$$

per $k = 0$ otteniamo

$$p(k) = \oint \frac{1}{z^2(z-1)^2} dz = 0$$

essendo la differenza di gradi tra numeratore e denominatore maggiore di 1 e quindi la somma dei residui pari a 0, lo stesso discorso vale per $k = 1$, per $k > 1$, invece

$$\mathrm{Res}(P(z), 1, =) \frac{dz^{k-2}}{dz}|_{z=2} = (k-2)2^{k-3}]\ .$$

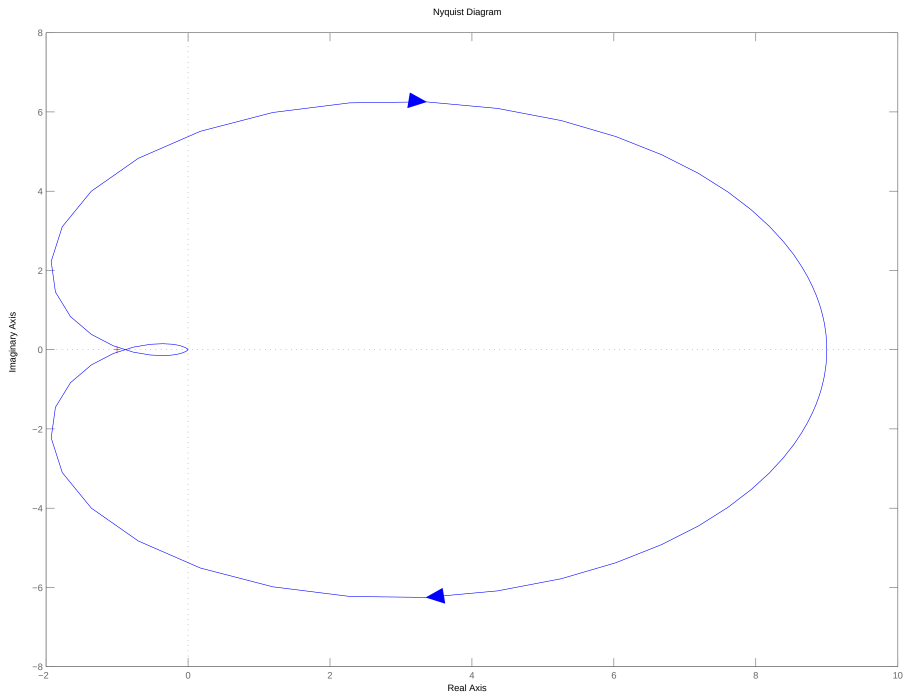
Parte B-II Il ritardo finito è approssimato da

$$H(s) = \frac{20}{20 + s};$$

il guadagno ad anello aperto del sistema, senza la rete correttrice, è

$$L(s) = H(s)P(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}\ ,$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che $\frac{1}{1+kL(0)} = \frac{1}{10}$ e quindi $k = 54/20$, tracciamo il diagramma di Nyquist di $L_2(s) = kL(s)$,



l'intersezione con il cerchio unitario si trova in modo rapido tramite la tabella di Routh, tramite l'equazione

$$\eta + L_2(s) = 0 \rightarrow s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + \frac{54}{\eta} = 0$$

e annullando la terza riga. Otteniamo l'equazione $11 - 1 - 9/\eta$, da qui si ottiene $\eta = 9/10$, il margine di ampiezza è dunque pari a $M = 10/9$. L'equazione ausiliaria è $6j\omega^2 + 11$ da cui l'intersezione con l'asse reale si ha per $\omega_c = 3.3166$.

Per progettare la rete ritardatrice prendiamo $\omega_0 < \omega_c$, ad esempio $\omega_0 = 2$, da cui

$$\phi = \pi + \arg(L_2(4j)) = 0.6610,\ M = \frac{3}{|P(4j)|} = 7.1042$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \rightarrow 0.7894 > 0.1408$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 5.1429$ e $\alpha = 0.1027$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 54/20 \frac{1 + 0.5282s}{1 + 5.143s} = 0.10271 \frac{s + 1.893}{s + 0.1944}\ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri è dato da

$$C_d(z) = \frac{0.3015z - 0.2495}{z - 0.9807}\ .$$

Per quanto riguarda la correttezza del tempo di campionamento, abbiamo che il lo zero o polo piu' veloce del controllore è in -1.893, da cui deriva la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{3} \frac{1}{1.893} = 0.5532s$$

che risulta verificata, il tempo di campionamento è dunque sufficientemente piccolo.

Parte B-III

Abbiamo che

$$B^+ = (z - 0.1),\ B^- = 1,\ A^+ = 1,\ A^- = (z-1)(z+2),$$

per il progetto deadbead non è necessario aggiungere un integratore, visto che ne è già presente uno. Poniamo

$$R(z) = R'(z)B^+,$$

i gradi sono dati da

$$\mathrm{gr}\{S'\} = \mathrm{gr}\{A^-\} - 1 = 2 - 1 = 1,\ \mathrm{gr}\{R'\} = \mathrm{gr}\{A\} - \mathrm{gr}\{B^+\} - 1 = 2 - 1 - 1 = 0\ .$$

L'errore è dato da

$$e(k) = u(k) - y(k) \rightarrow E(z) = U(z)\frac{1}{1 + \frac{B^-(z)S'}{A^-(z)R'}}$$

sostituendo $U(z) = \frac{z}{z-1}$ otteniamo

$$e(k) = \frac{z}{z-1}\frac{A^-(z)R'}{A^-(z)R' + B^-(z)S'}\ . \tag{1}$$

Imponiamo l'equazione diofantea

$$A^-(z)R' + B^-(z)S' = z^k\ ,$$

otteniamo

$$(z+2)(z-1)r_0 + (s_1 z + s_0) = z^2\ ,$$

da cui $r_0 = 1$, $s_1 = -1$, $s_0 = 2$ ed il controllore risulta

$$c(z) = \frac{2-z}{z-0.1}\ .$$

dall'equazione (1) otteniamo

$$e(k) = 1 + 2z^{-1}\ ,$$

quindi $e(0) = 1$, $e(1) = 2$, $e(k) = 0$, $\forall k > 1$ da cui $y(k) = u(k) - e(k)$ soddisfa $y(0) = 0$, $y(1) = -1$, $y(k) = 1\ \forall k > 1$.