Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 15 Gennaio 2007
Parte A

1- Presenta e dimostra la formula della trasformata zeta di una sequenza traslata in avanti e in indietro.

2- Che relazione esiste tra i poli di un sistema a tempo continuo e i poli del corrispondente equivalente discreto? Disegna i luoghi a crescita esponenziale costante e a pulsazione costante sul piano s e sul piano z.

3- Considera il sistema a tempo continuo

$$P(s) = \frac{101}{s^2 + 2s + 101} \ .$$

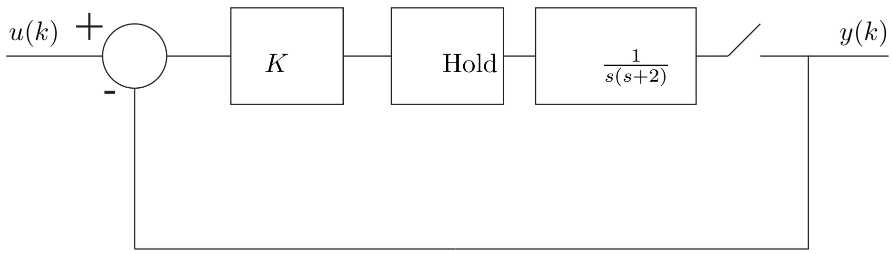
a- Determina l'equivalente discreto del sistema $P(s)$, cioè

$$P(z) = \mathcal{Z}[P(s)] \ ,$$

b- Determina la risposta all'impulso $p(t)$ del sistema continuo e quella $p^*(k)$ dell'equivalente discreto .

c- Traccia il grafico della risposta all'impulso del sistema continuo e dell'equivalente discreto assumendo il tempo di campionamento pari a $T = \frac{2\pi}{10}$. Ti sembra appropriata questa scelta del tempo di campionamento?

4- Considera il seguente sistema,



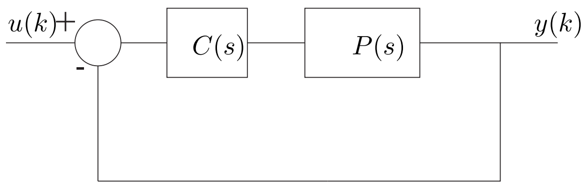
a- Trasforma il sistema in uno in cui compaiono solo blocchi discreti e calcola la funzione di trasferimento ad anello aperto del sistema, mantenendo il tempo di campionamento T in forma simbolica.

b- Posto $K = 4$, calcola il massimo valore del tempo di campionamento T per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 15 Gennaio 2006
Parte B

1- Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi discreti.

2- Considera il seguente sistema a tempo continuo,



con

$$P(s) = \frac{1}{(s+2)^3} \; .$$

a- Determina una rete anticipatrice di forma

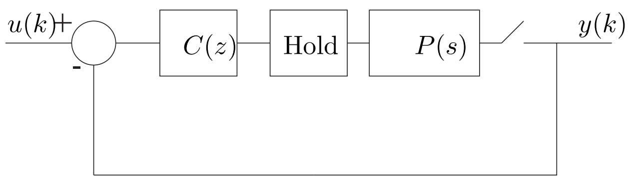
$$C(s) = k\frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \; ,$$

in modo tale da soddisfare alle specifiche

- errore a regime al gradino pari a 1/10
- margine di fase pari a 15 gradi .

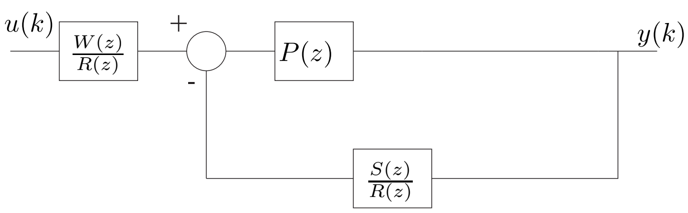
Nota: In questa prima parte dell'esercizio NON tenere conto del ritardo associato al tempo di campionamento, che sara' considerato nel punto b.

b- Considera ora il corrispondente schema di controllo a tempo discreto:



Determina il controlore $C(z)$ discretizzando il controllore continuo mediante la regola della corrispondenza poli-zeri e scegliendo il tempo di campionamento T in modo tale che il peggioramento del margine di fase derivante dal ritardo introdotto nell'anello di controllo sia pari ad 1 grado.

3- Progetta i polinomi $W(z)$, $S(z)$, $R(z)$ per il seguente sistema



con $P(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, in modo che la funzione di trasferimento complessiva del sistema sia data da

$$T(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2} \; .$$

Qual'è l'errore a regime al gradino unitario del sistema retroazionato?

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a- L'equivalente discreto è dato da

$$P(z) = \mathcal{Z}[P(s)] = \frac{\frac{101}{10} e^{-T} \sin(10T) z}{z^2 - 2z \cos 10T e^{-T} + e^{-2T}} \ .$$

b- La risposta all'impulso del sistema continuo è data da

$$p(t) = \mathcal{L}^1 P(z) = \frac{101}{20} e^{-t} \sin(10t) \ ,$$

la risposta del sistema discreto si trova campionando $p(t)$, otteniamo dunque

$$p^*(k) = p(kT) = \frac{101}{20} e^{-kT} \sin(10kT) \ .$$

c- Assumento $T = \frac{\pi}{10}$ si ottiene

$$p^*(k) = \frac{101}{2)} e^{-k\frac{\pi}{10}} \sin(k\pi) = 0 \ ,$$

il tempo di campionamento non è chiaramente appropriato.

Domanda 4

L'equivalente discreto del sistema continuo preceduto dall'hold si può trovare ad esempio con il metodo dei residui ed è dato da

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{1}{s^2(s+2)}] = \frac{z(-1 + 2T + e^{-2T}) + 1 - (1 + 2T)e^{-2T}}{4(z-1)(z - e^{-2T})} \ ,$$

l'equazione caratteristica è data da $1 + 4P(z) = 0$, cioè

$$q(z) = z^2 + z(2T - 2) + 1 - 2Te^{-2T} = 0 \ ,$$

valutiamo la stabilità attraverso il criterio di Jury, occorre

$$1 > Te^{-2T} \rightarrow \text{ sempre verificata } \ ,$$

$$q(1) > 0 \rightarrow 2T(1 - e^{-2T}) > 0 \rightarrow \text{ sempre verificata } \ ,$$
$$q(-1) > 0 \rightarrow T(1 + e^{-2T}) < 2 \rightarrow T < 1.961 \ ,$$

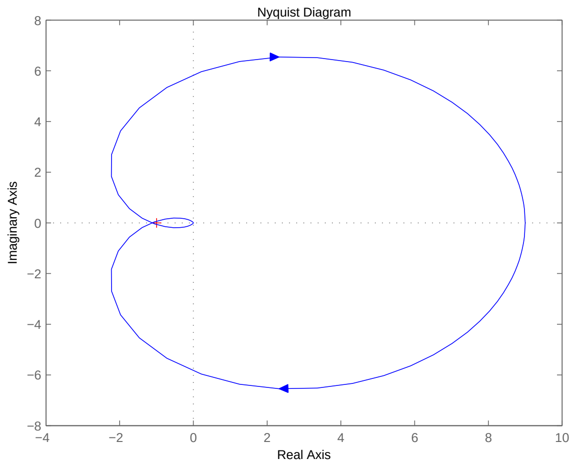
la terza equazione si risolve per tentativi. Il tempo di campionamento massimo è quindi $T = 1.961s$.

Parte B

2-
a- Il guadagno K si determina tramite la relazione

$$\frac{1}{1 + KP(0)} = 1/10 \leftarrow K = 72 \ .$$

Il diagramma di Nyquist di $KP(s)$ è riporato in figura



in particolare l'intersezione con l'asse reale avviene in -1.125 per $\omega_c = 2\tan\frac{\pi}{2} = 3.464$. Per imporre il margine desiderato utilizziamo le formule di inversione per la rete anticipatrice. Possiamo prendere $\omega_0 = 4$, da cui

$$M = 1/|P(4j)| = 1.2423,\ \phi = -\pi - \arg(P(4j)) + M_F = 0.4417\ ,$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \rightarrow 0.9040 > 0.8050$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 0.1978$ e $\alpha = 0.2929$, il controllore trovato risulta dunque

$$C(s) = 72\frac{1 + 0.1978s}{1 + 0.05794s}\ .$$

b- Il ritardo introdotto dal filtro di hold è dato da $T/2$, la cui trasformata di Laplace è $e^{-sT/2}$. Il ritardo di fase introdotto alla pulsazione critica ω_0 è dato da $\omega_0 T/2 = 2T$. Vogliamo che tale ritardo sia pari ad un grado, quindi

$$\frac{\pi}{180} = 2T \rightarrow T = 0.0087s\ .$$

Discretizzando il controllore con la corispondenza poli-zeri si ottiene

$$C(z) = 72\frac{3.24z - 3.101}{z - 0.8606}\ .$$

4- La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{W(z)}{R(z)(z-2)^2 + S(z)}\ ,$$

che occorre rendere uguale alla funzione $\frac{1}{(z-0.5)^2}$. L'equazione diofantea è data da

$$R(z)(z-2)^2 + S(z) = (z-0.5)^2 a(z)\ ,$$

dove $a(z)$ è un polo aggiuntivo stabile necessario per eguagliare il grado dei due membri dell'equazione, che andra' poi semplificato.

Uguagliando il numero di equazioni e di incognite, abbiamo che

$$\mathrm{Gr}[R] + 2 + 1 = \mathrm{Gr}[R] + grS + 2 \rightarrow \mathrm{Gr}[S] = 1\ ,$$

per avere un controllore proprio occorre $\text{Gr}[R] = \text{Gr}[S] = 1$, poniamo $a(z) = z$, l'equazione diofantea diventa quindi

$$(r_1 z + r_0)(z^2 - 4z + 4) + (s_1 z + s_0) = z(z - 0.5)^2 \ ,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 - 4r_1 = -1 \\ -4r_0 + 4r_1 + s_1 = 0.25 \\ 4r_0 + s_0 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$r_1 = 1, \ r_0 = 3, \ s_1 = 8.25, \ s_0 = -12 \ ,$$

da cui $R(z) = z + 3$, $S(z) = 8,25z - 12$, per completare è sufficiente porre $W(z) = a(z) = z$. L'errore al gradino unitario è dato da

$$1 - \ \text{Res}\{\frac{z}{z-1} T(z), 1\} = 3/4 \ .$$