Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 16 Febbraio 2009 - Parte A

1- (6 p.) Presenta e dimostra il teorema di traslazione in indietro nel tempo per la trasformata zeta.

2- (6 p.) Descrivi il fenomeno dell'aliasing e spiega il ruolo del filtro antialiasing.

3- (6 pt.) Un sistema a tempo discreto, con ingresso il segnale $u(k)$ e con uscita $y(k)$ è descritto dalla seguente equazione alle differenze

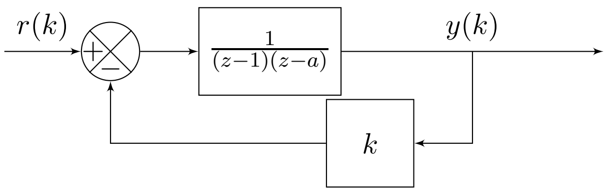
$$y(k) = 0.5y(k-1) + u(k) + u(k-1);$$

a) Determina la funzione di trasferimento e la risposta all'impulso del sistema ,
b) Determina un segnale di ingresso $u(k)$ la cui uscita corrispondente sia

$$y(k) = 1(k)$$

e tracciane il grafico.

4- (8 p.) Considera il seguente sistema

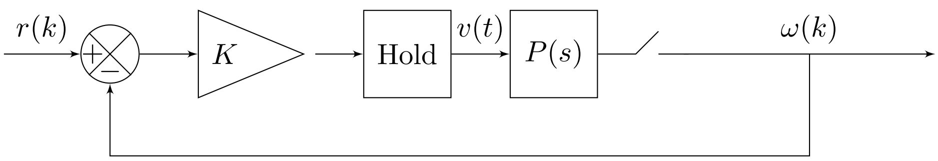


a) Determina la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determina sul piano (a, k) l'insieme dei valori dei parametri $a, k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
c) Assumere che il parametro a sia incerto e che sia tale che $a \in [-0.5, 0.5]$, determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del sistema per tutti i possibili valori di a in tale intervallo.

5- (7 p.) Nello schema seguente l'impianto $P(s)$ rappresenta un motore elettrico a corrente continua senza carico, le cui equazioni (semplificate) sono le seguenti

$$\begin{aligned} &v = iR + k\omega \\ &\tau = ki \\ &\frac{d\omega}{dt}J = \tau - D\omega \ . \end{aligned}$$

L'ingresso del sistema v è la tensione di ingresso, i è la corrente di avvolgimento, R la resistenza di avvolgimento, k un parametro costruttivo del motore, τ la coppia generata, J l'inerzia del rotore e D il coefficiente di attrito viscoso. L'uscita del sistema è ω, la velocità angolare.

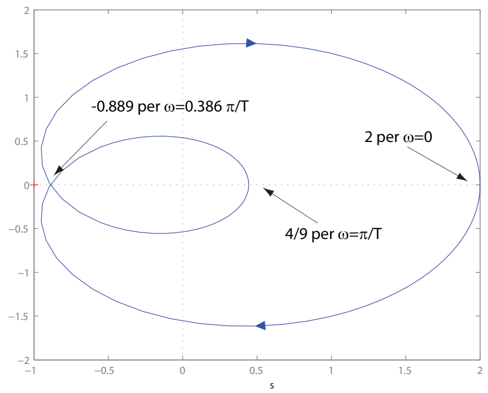


a) Determina la funzione di trasferimento $P(s)$.
b) Determina la funzione di trasferimento del sistema dall'ingresso di set point di velocità $r(k)$ alla velocità campionata $\omega(k)$.
c) Trova l'insieme dei valori del guadagno K per cui il sistema è asintoticamente stabile. Per questi valori di K determina l'uscita a regime in corrispondenza di un valore costante dell'ingresso $r(k) = r_0$.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 16 Febbraio 2009 - Parte B

1- (7 p.) Presenta la trasformazione di Tustin per la discretizzazione dei sistemi a tempo continuo, ricavandone l'espressione.

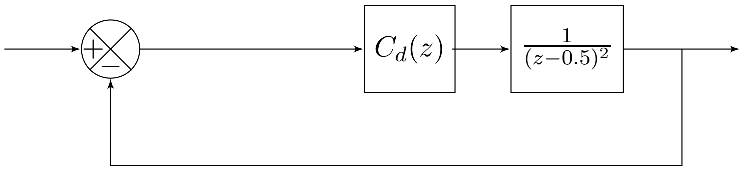
2- (8 p.) Considera il seguente diagramma di Nyquist.



a) Determina la funzione di trasferimento del sistema, sapendo che questa ha la forma $P(z) = \frac{K}{(z-0.2)(z-a)}$. con $K, a \in \mathbb{R}$.

b) Determina i margine di ampiezza e di fase (quest'ultimo è più semplice farlo per via numerica).

3- (9 p.) Considera il seguente sistema,

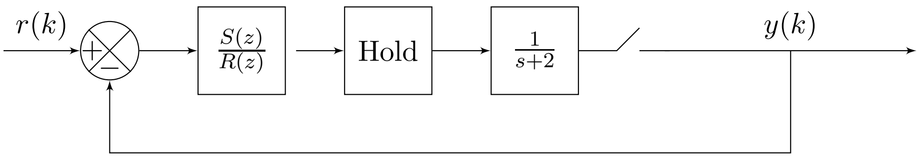


Disegna il diagramma di Nyquist per il sistema e progetta il controllore discreto $C_d(z)$ nel piano w, usando il controllore $C(w) = K\frac{1+\alpha\tau w}{1+\tau w}$, in modo da avere

1) errore a regime al gradino unitario pari ad 1/10,

2) margine di ampiezza pari a 2.

4- (9 p.) a- Progetta il controllore $\frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema, in modo tale che la risposta al gradino unitario $r(k) = 1(k)$ sia di tipo deadbeat. Assumere il tempo di campionamento pari a $T = 1$.



Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Facendo la trasformata zeta dell'equazione alle differenze:

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = U(z) + z^{-1}U(z) \rightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z-0.5} ,$$

la funzione di trasferimento del sistema è quindi $P(z) = \frac{z+1}{z-0.5}$, antitrasformando troviamo la risposta all'impulso

$$p(k) = \delta(k) + 1.5 \cdot 0.5^{k-1} 1(k-1) .$$

b) Se $y(k) = 1$ allora $Y(z) = \frac{z}{z-1}$, sappiamo che $U(z) = Y(z)\frac{z-0.5}{z+1}$ e quindi $U(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}$, antitrasformando

$$u(k) = \delta(k) + 0.25 \cdot 1(k) - 0.75 \cdot (-1)^k .$$

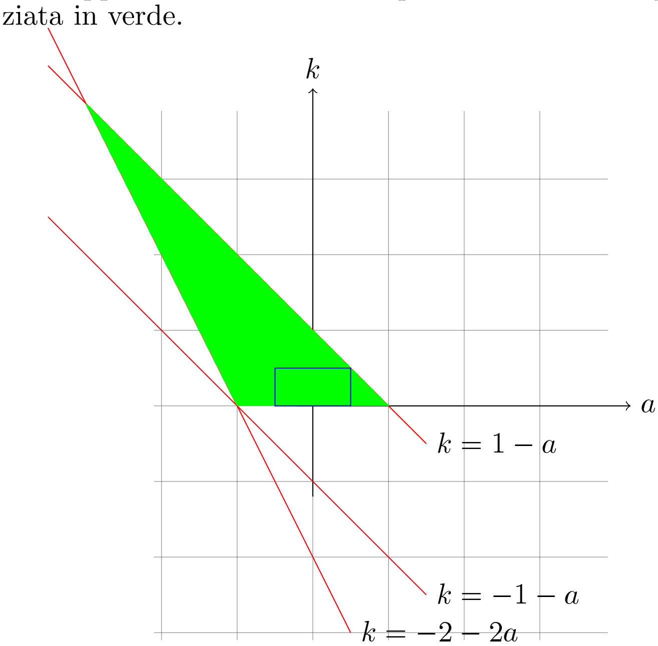
Domanda 4
a- La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{1}{(z-1)(z-a)+k} .$$

b- L'equazione caratteristica è

$$q(z) = z^2 - z(1+a) + a + k$$

Le condizioni per la stabilità asintotica sono
1) $|a+k| < 1 \rightarrow -1 < a+k < 1$,
2) $1 - 1 - a + a + k > 0 \rightarrow k > 0$,
3) $1 + 1 + a + a + k > 0 \rightarrow k > -2a - 2$.
Rappresentiamo le tre disequazioni trovate nel piano (a, k), l'intersezione è l'area evidenziata in verde.



c) In figura è indicato in blu il più grande rettangolo con due lati opposti in $a = -0.5$ e $a = 0.5$ contenuto nella regione verde. Dall'estensione del rettangolo nella dimensione k si vede che si ha stabilità asintotica per $k \in (0, 0.5)$.
Domanda 5
a) Scriviamo l'equazione differenziale che lega l'ingresso v e la velocità ω.

$$J\frac{d\omega}{dt} = -D\omega - \frac{k^2}{R}\omega + \frac{k}{R}v .$$

Facendo la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale si ottiene

$$Js\Omega(s) = -(D + \frac{k^2}{R})\omega(s) + \frac{k}{R}v \ ,$$

da cui

$$P(s) = \frac{k}{JRs + DR + k^2} = \frac{k}{JR}\frac{1}{s + \frac{DR+k^2}{JR}} = b\frac{1}{s+a} \ ,$$

dove si è posto $a = \frac{DR+k^2}{JR}$ e $b = \frac{k}{JR}$.

b) Calcoliamo la trasformata zeta della serie del filtro di hold e del sistema

$$P(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{b}{s+a}] = \frac{b}{a}\frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}} \ .$$

La funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{Kb(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT}) + Kb(1-e^{-aT})} \ ,$$

si tratta di un sistema del primo ordine, la posizione del polo è data da

$$p = K\frac{b(1-e^{-aT})}{a} - e^{-aT} \ ,$$

il sistema è dunque stabile se e solo se

$$-(1-e^{-aT}) < K(1-e^{-aT})\frac{b}{a} < 1 + e^{-aT} \ ,$$

da cui

$$K \in (-\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}}) \ .$$

c) Per i valori di K per cui il sistema è asintoticamente stabile, il valore di regime dell'uscita è dato da

$$\omega_\infty = r_0 T(1) = r_0\frac{Kb}{a+Kb} \ .$$

Parte B

2-

Dal diagramma di Nyquist fornito vediamo che $P(1) = 2$, $P(-1) = -6$, abbiamo quindi le due condizioni

$$\begin{cases} \frac{K}{(0.8)(1-a)} = 2 \\ \frac{K}{-1.2(-1-a)} = 4/9 \ , \end{cases}$$

dividendo la seconda equazione per la prima otteniamo $\frac{1+a}{1-a} = 3$, da cui $a = 1/2$, sostituendo questo valore nella prima equazione troviamo $K = 0.8$. Il margine di ampiezza è dato da $1/0.889 = 1.125$, il margine di fase è di cerca 20 gradi e si può trovare risolvendo per via numerica, ad esempio per bisezione, l'equazione $|P(j\omega)| = 1$.

3-

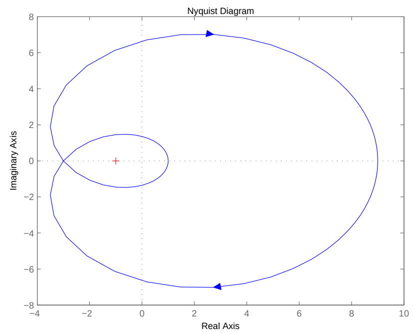
Passiamo al piano w tramite la trasformazione $z \to \frac{1+w}{1-w}$. Otteniamo

$$P_w(w) = 4\frac{(1-w)^2}{(1+3s)^2} \ ,$$

per avere errore a regime al gradino pari ad 1/10, deve valere la condizione

$$1/9 = \frac{1}{P_w(0)C_w(0)} \to K = \frac{9}{4} \ .$$

Il diagramma dy Nyquist di $P_1(w) = KP_w(w)$ è riportato sotto.



Applichiamo le formule di inversione, scegliendo $\omega_0 = 0.5$, otteniamo $P_1(0.5j) = 3.4615e^{-2.8929j}$. Poniamo $M = 2|P_1(0.5j)| = 6.9231$, $\phi = \pi - 2.8929 = 0.2487$, verifichamo che $M\cos\phi = 6.71$ è maggiore di zero. Applicando le formule di inversione, otteniamo $\alpha = 0.1385$, $\tau = 48.3750$.

Il controllore cercato è

$$C_w(w) = 9/4\frac{1 + 6.7101s}{1 + 48.375s} .$$

Il controllore a tempo discreto si trova con la trasformazione bilineare inversa $w \to \frac{z-1}{z+1}$.

$$C_d(z) = \frac{0.156z - 0.1155}{z - 0.9595} .$$

4-

L'equivalente a tempo discreto della serie del filtro di hold, dell'impianto e del campionatore è data da

$$P_1(z) = \frac{1}{2}\frac{1 - e^{-2}}{z - e^{-2}} = \frac{B(z)}{A(z)} ,$$

la trasformata del segnale errore al gradino è data da

$$E(z) = \frac{z}{z-1}\frac{A(z)R(z)}{B(z)S(z) + A(z)R(z)} ,$$

per annullare l'errore in un numero finito di passi, occorre porre $R(z) = R'(z)(z-1)$, in questo modo

$$E(z) = \frac{zA(z)R'(z)}{B(z)S(z) + A(z)R'(z)(z-1)} ,$$

possiamo cancellare il polo stabile con il numeratore del controllore, podendo $S(z) = S'(z)(z - e^{-2})$, l'equazione diofantea è data da

$$(1 - e^{-2})S(z) + R'(z)(z-1) = z^p ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + \mathrm{Gr}[A] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + \mathrm{Gr}[S] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 0$ e quindi $\mathrm{Gr}[R] = 0$. Poniamo $S(z) = s_0$ e $R'(z) = r_0$. L'equazione da risolvere è

$$(1 - e^{-2})(s_0) + 2(z-1)r_0 = z ,$$

da cui

$$r_0 = 1/2; , \ s_0 = \frac{1}{1 - e^{-2}} ,$$

il controllore è dato da

$$C(z) = \frac{(z - e^{-2})(1 - e^{-2})}{0.5(z-1)} .$$