Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello straordinatio di Controlli Digitali del 16 novembre 2009 - Parte A

1- (4 p.) Presenta e dimostra il teorema di traslazione in avanti nel tempo per la trasformata zeta.

2- (5 p.)
a) Dimostra che, per un sistema a tempo discreto lineare e tempo invariante, l'uscita è data dalla convoluzione dell'ingresso con la risposta all'impulso del sistema.
b) Fai un esempio di sistema lineare ma non tempo invariante.

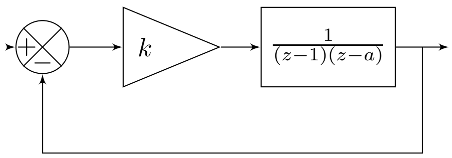
3- (3 p.) Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, con funzione di trasferimento $P(z) = \frac{z}{z-1}$ ha in uscita la funzione $y(k) = \delta(k)$. Determina il segnale di ingresso del sistema.

4- (6 p.) Il signor Bianchi ha un allevamento di criceti. Indicando con $x(k)$ il numero di criceti all'anno $k$-esimo, questo soddisfa l'equazione

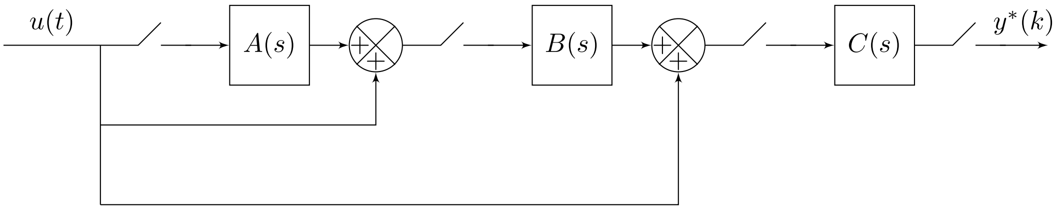
$$\begin{cases} x(k+1) = (1+\alpha)x(k) - p \\ x(0) = C \ , \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$ è una costante che rappresenta il tasso di crescita della popolazione, $C > 0$ è il numero iniziale di criceti e $p$ è il numero di criceti che il signor Bianchi preleva ogni mese per la vendita.
a) Determina la trasformata zeta di $x(k)$.
b) Determina la successione $x(k)$.
c) Il signor Bianchi vuole chiudere l'allevamento in 10 anni. Assumendo che la popolazione iniziale di criceti sia pari a $C = 1000$ e che $\alpha = 0.1$, qual'è il numero massimo di criceti che può vendere in questo periodo?

5- (5 p.) Determina i valori dei parametri $k, a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile

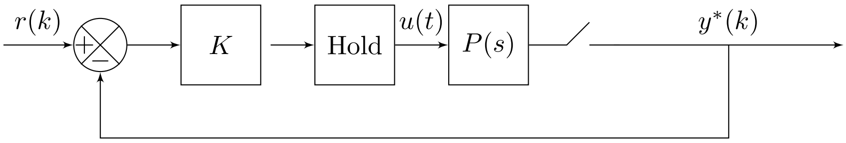



6- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente a tempo discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi a tempo discreto. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.




7- (5 p.) Nello schema seguente il sistema $P(s)$ soddisfa l'equazione

$$Dy(t) = u(t) \ .$$



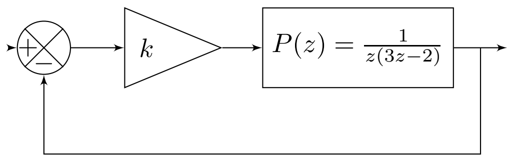

Calcola la funzione di trasferimento del sistema (lascia il tempo di campionamento indicato genericamente con $T$.)

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria

Appello straordinario di Controlli Digitali del 16 Novembre 2009 - Parte B

1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi a tempo discreto.

2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$.

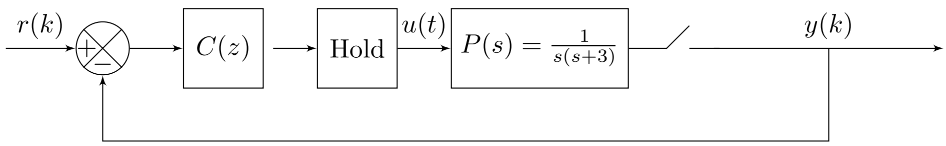



a) Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema $P(z) = \frac{1}{z(3z-2)}$.

b) Determina la banda passante di $P(z)$ (ad anello aperto).

c) Determina l'intervallo dei valori in $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema collegato in retroazione è asintoticamente stabile.

3- (9 p.) In un progetto per discretizzazione, considera lo schema seguente, dove $P(s) = \frac{1}{s(s+3)}$ e il tempo di campionamento è pari a $T = 0.2$ s.



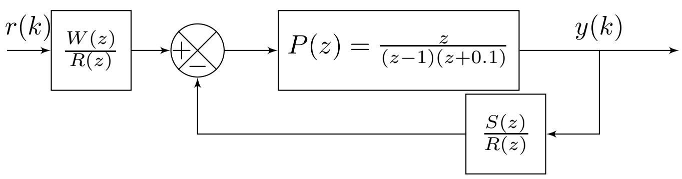

a) Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime alla rampa pari a 1/20 e margine di fase pari a 50 rad/s. Il progetto va effettuato discretizzando con la trasformata di Tustin una rete ritardatrice di forma

$$C_a(s) = k\frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \ ,$$

tenendo conto del ritardo associato al filtro di hold con l'approssimazione $e^{-\frac{sT}{2}} \simeq \frac{1}{1+s\frac{T}{2}}$.

b) Discuti la correttezza del tempo di campionamento, verificando che la discretizzazione del controllore mediante Tustin non introduca una distorsione significativa alla pulsazione di attraversamento del cerchio unitario.

4- (8 p.) Progetta i due controllori $\frac{W(z)}{R(z)}$, $\frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema




in modo che $\frac{S(z)}{R(z)}$ e $\frac{W(z)}{R(z)}$ abbiano grado relativo pari ad 1 e la funzione di trasferimento del sistema tra $r(k)$ ed $y(k)$ corrisponda a $T_d(z) = \frac{1}{z(z-0.5)}$ .

Soluzione:

Domanda 3

$U(z) = \frac{Y(z)}{P(z)} = \frac{z-2}{z-1} = 1 - \frac{1}{z-1}$ quindi

$$u(k) = \delta(k) - 1(k-1) \; .$$

Domanda 4

a) Trasformando

$$zX(z) - zC = (1+\alpha)X(z) - p\frac{z}{z-1} \; ,$$

da cui si ottiene

$$X(z) = \frac{z(C(z-1)-p)}{(z-(1+\alpha))(z-1)} \; .$$

b) Antitrasformando

$$x(k) = C(1+\alpha)^k - p\frac{(1+\alpha)^k - 1}{\alpha} \; , .$$

c) Dobbiamo massimizzare $p$, l'unico vincolo è che la popolazione dopo $N$ anni si mantenga positiva, poniamo quindi $x(N) = 0$ e otteniamo che il valore ottimo di $p$ è pari a

$$p^\star = C\frac{(1+\alpha)^N \alpha}{(1+\alpha)^N - 1} \; ,$$

sostituendo i valori numerici indicati si ottiene $p^s tar = 162.75$ e il numero totale di criceti venduti è pari a 1627.

Domanda 5

L'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^2 - z(1+a) + a + k,$$

le condizioni necessarie sono

1) $1 > |a+k| \to k \in (-1-a, 1-a)$

2) $q(1) > 0 \to k > 0$

3) $q(-1) > 0 \to k > -2(1+a)$

Da queste condizioni si può trovare la regione di stabilità nel piano $(k, a)$.

Domanda 6

Applicando le regole di riduzione, si trova la seguente funzione di trasferimento

$$T_{u^*}^{y^*} = C(z)(1 + B(z) + A(z)B(z)) \; .$$

Domanda 7

Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento del sistema è data da

$$P(s) = \frac{1}{s} \; .$$

Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s}] = \frac{T}{z-1}$$

la funzione di trasferimento è quindi

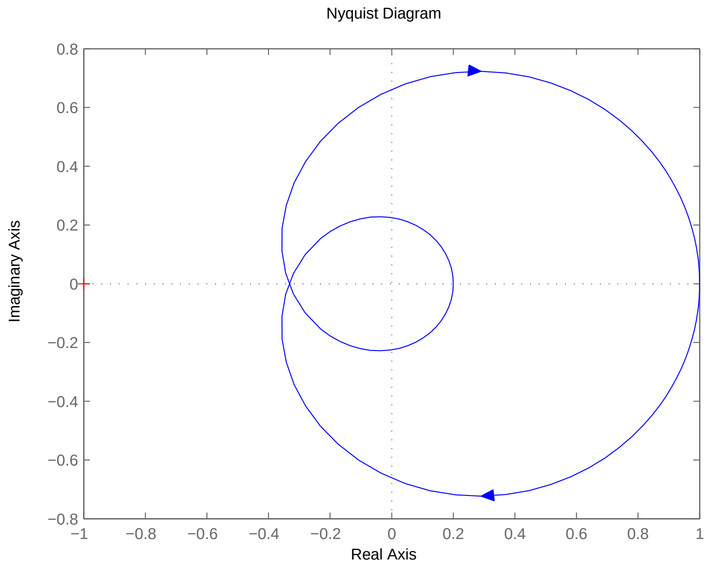
$$T(z) = \frac{kL(z)}{1+kL(z)} = \frac{kT}{z-1+kT} \; .$$

Parte B

2- Trasformando con Tustin si ottiene

$$P_w(w) = \frac{(1-w)^2}{(1+w)(1+5w)} \; .$$

a) Il diagramma di Nyquist è il seguente




b) La banda passante sul piano $w$, $\omega_{pw}$ si ottiene ponendo

$$|P_w(j\omega_{pw})| = \sqrt{2}/2,$$

si ricava un'equazione di secondo grado in $\omega_{pw}$ che ha come soluzione $\omega_{pw} = 1/\sqrt{23} = 0.2085$. Per trovare la banda passante effettiva occorre calcolare la pulsazione corrispondente sul piano $z$, data da

$$\omega_w = \frac{2}{T}\arctan(\frac{T}{2}\omega_{pw}) = 0.2056\text{rad/s} .$$

c) Il sistema è asintoticamente stabile se

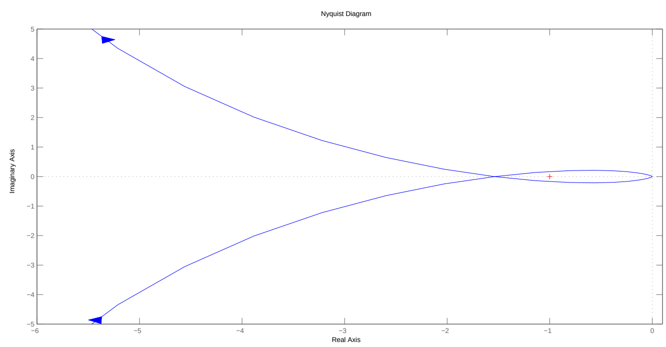
$$-1/3 < -1/k < 1 \rightarrow k \in (-1, 3) .$$

3- Nel progetto per discretizzazione approssimiamo il ritardo pari a $T/2$ nella forma $\frac{1}{1+sT/2} = \frac{10}{10+s}$ e consideriamo il sistema

$$P_d(s) = \frac{10}{(10+s)(s+3)s} .$$

Per soddisfare alla specifica sul guadagno statico, occorre porre $kP_d(0) = 20$, da cui $k = 60$. Poniamo $L_2(s) = 60P_d(s)$.

Il diagramma di Nyquist di $L_2(s)$ è il seguente.




Il sistema è instabile e interseca il cerchio unitario alla pulsazione di 6.7 rad/s. Per imporre il margine di fase richiesto, scegliamo $\omega_0 = 1$, otteniamo $M = 18.88$ e $\phi = 0.2767$, da cui $\alpha = 0.0507$, $\tau = 65.58$ e il controllore risulta

$$C(s) = 60\frac{1+3.327s}{1+65.59s} ,$$

sostituendo $s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 10\frac{z-1}{z+1}$, otteniamo $C(z) = \frac{3.087z-2.996}{z-0.9985}$. Per il tempo di campionamento, la condizione richiesta è data da

$$T < \frac{\pi}{4\omega_0} = 0.7854 ,$$

che risulta verificata.

4-

Per cancellare i poli e gli zeri stabili poniamo $S(z) = S'(z)(z+0.1)$, $W(z) = W'(z)(z+0.1)$,$R(z) = W'(z)z$. A questo punto la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita è data da

$$T_r^y = \frac{W'(z)}{(z-2)R'(z)+S'(z)} = \frac{A_0(z)}{z^2 A_0(z)} \ .$$

L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)R'(z) + S'(z) = A_0(z)z(z-0.5) \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo pari ad 1, poniamo $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S'] + 1$, da cui $\mathrm{Gr}[R'] = 1$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-1)(r_1 z + r_0) + s_0 = z(z-0.5) \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_0 = 1, \ r_1 = 0.5, \ s_0 = 0.5 \ .$$

Poniamo quindi $A_0(z) = 1$ e il polinomi risultano

$$R(z) = z(1+0.5), \ S(z) = 0.5(z+0.1), \ W(z) = (z+0.1) \ .$$