Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'16 Gennaio 2006

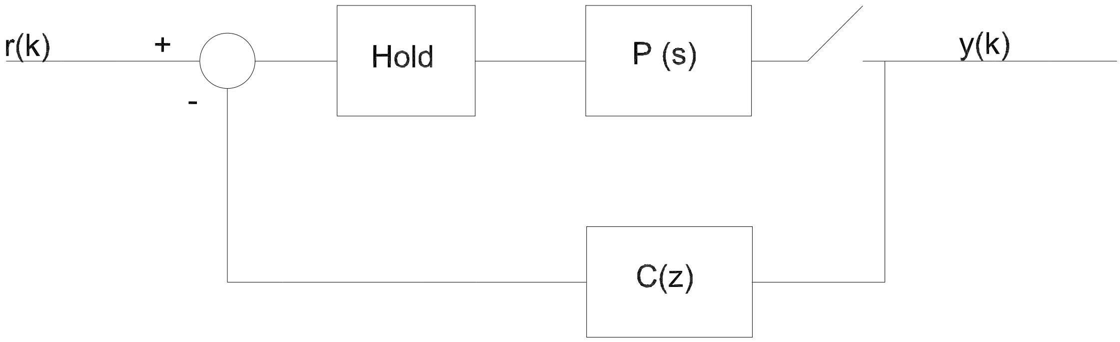
Parte A-I

Definire il concetto di stabilità asintotica nei sistemi discreti, quindi enunciare e dimostrare il Teorema di Nyquist per i sistemi discreti.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'16 Gennaio 2006

Parte A-II

1- Considera il seguente sistema, in cui $u(k)$ rappresenta l'ingresso e $y(k)$ rappresenta l'uscita.



con

$$P(s) = \frac{a}{s(s+a)} \ , \ C(z) = k \ ,$$

- calcola la funzione di trasferimento $T(z)$ tra l'ingresso campionato $u(k)$ e l'uscita $y(k)$, assumendo $a > 0$
- calcola l'insieme dei valori per $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è stabile, scegliendo $a = 2$ e il tempo di campionamento $T = 0.1s$.

2- Calcola la risposta all'impulso per il seguente sistema usando il metodo dell'integrale di inversione.

$$P(z) = \frac{z}{(z-1)^4}$$

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'16 Gennaio 2006

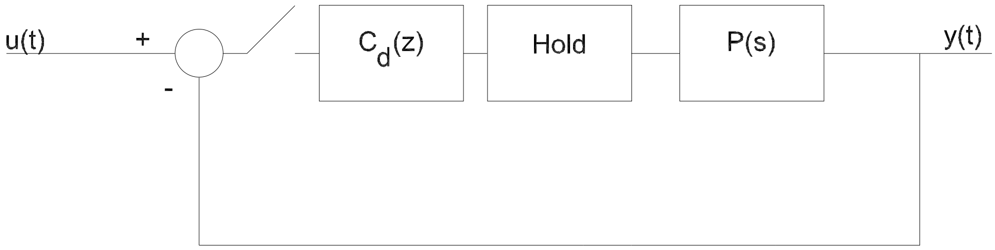
Parte B-I

Illustra i metodi di discretizzazione basati sull'invarianza della risposta all'impulso, al gradino e alla rampa.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali dell'16 Gennaio 2006

Parte B-II

Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}\ ,\ C(s) = k\frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$$

tieni conto che nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$$

e considera un tempo di campionamento $T = 0.2s$.

a- Determina la costante K che consente un errore a regime in risposta al gradino unitario pari a 1/3.

b- Traccia il diagramma di Nyquist del sistema continuo, senza la rete ritardatrice ma tenendo conto del guadagno K.

c- Calcola il margine di ampiezza.

d- Progetta il controllore continuo $C(s)$ che consenta di avere un margine di ampiezza pari a $M_a = 3$.

e- Discretizza il controllore trovato attraverso il metodo della corrispondenza poli-zeri.

f- Discuti se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

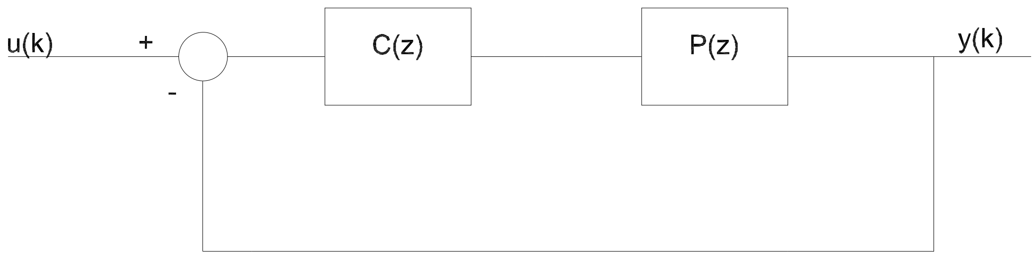
Parte B-III

Progetta un controllore $C(z)$ per il sistema rappresentato in figura, con

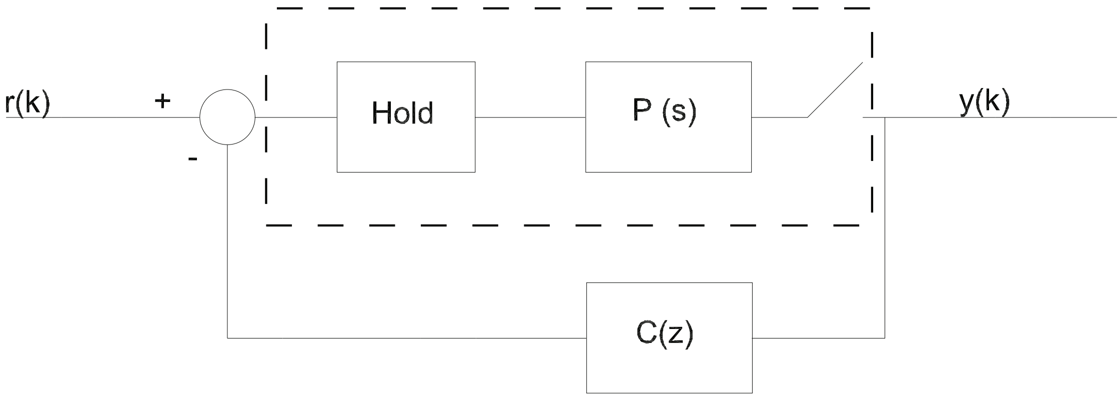
$$P(z) = \frac{z - 0.1}{(z-1)(z+0.6)} \, .$$

in modo tale che

- il sistema presenti errore a regime nullo in risposta alla rampa
- la funzione di trasferimento del sistema retroazionato abbia tempo di assestamento $T_a < 0.3s$, assumendo un tempo di campionamento pari a $0.1s$



Soluzione:
Parte A-II
1-
a-
La trasformata zeta del sottosistema indicato nel riquadro tratteggiato della figura seguente



è data da

$$L(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{a}{s^2(s+a)}] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{a}\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a}\frac{1}{s}] =$$

$$= \frac{z-1}{z}(\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{1}{a}\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{1}{a}\frac{z}{z-1}) = \frac{z(aT-1+e^{-aT}) + (1-(aT+1)e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})} ,$$

la funzione di trasferimento tra ingresso ed uscita è data da

$$T(z) = \frac{L(z)}{1+kL(z)} =$$

$$= \frac{\left(a\,T\,z - a\,T\,e^{-a\,T} - z + 1 + z\,e^{-a\,T} - e^{-a\,T}\right)(z-1)\,a\,\left(z-e^{-a\,T}\right)}{(z-1)\,a\,\left(z-e^{-a\,T}\right)\left(a\,z^2 - a\,z\,e^{-a\,T} - a\,z + a\,e^{-a\,T} + k\,a\,T\,z - k\,a\,T\,e^{-a\,T} - k\,z + k + k\,z\,e^{-a\,T} - k\,e^{-a\,T}\right)}$$

il guadagno ad anello del sistema è dato quindi da

$$L_2(z) = 1 + KL(z) ,$$

Sostituendo $a = 2$ e $T = 0.1$ otteniamo l'equazione caratteristica

$$z^2 + z(-1.819 + 0.009366k) + 0.8187 - 0.008761k$$

applichiamo il criterio di Jury, basta ricorrere alle sole condizioni iniziali

$$\begin{array}{l} 1 > |0.8187 + 0.008800k| \leftarrow -206.6 < k < 20.60 \\ 1 + (-1.819 + 0.009366k) + 0.8187 - 0.008761k > 0 \leftarrow k > 0 \\ 1 - (-1.819 + 0.009366k) + 0.8187 - 0.008761k > 0 \leftarrow k < 6012 \end{array}$$

da cui, mettendo insieme le varie condizioni

$$0 < k < 20.6 .$$

2- Facciamo l'antitrasformata zeta attraverso l'integrale di inversione

$$p(k) = \oint \frac{z}{(z-1)^4} z^{k-1} dz = \mathrm{Res}(P(z), 1, =)\frac{1}{3!}\frac{d^3 z^k}{dz^3}|_{z=1} = \frac{1}{6}k(k-1)(k-2)]; .$$

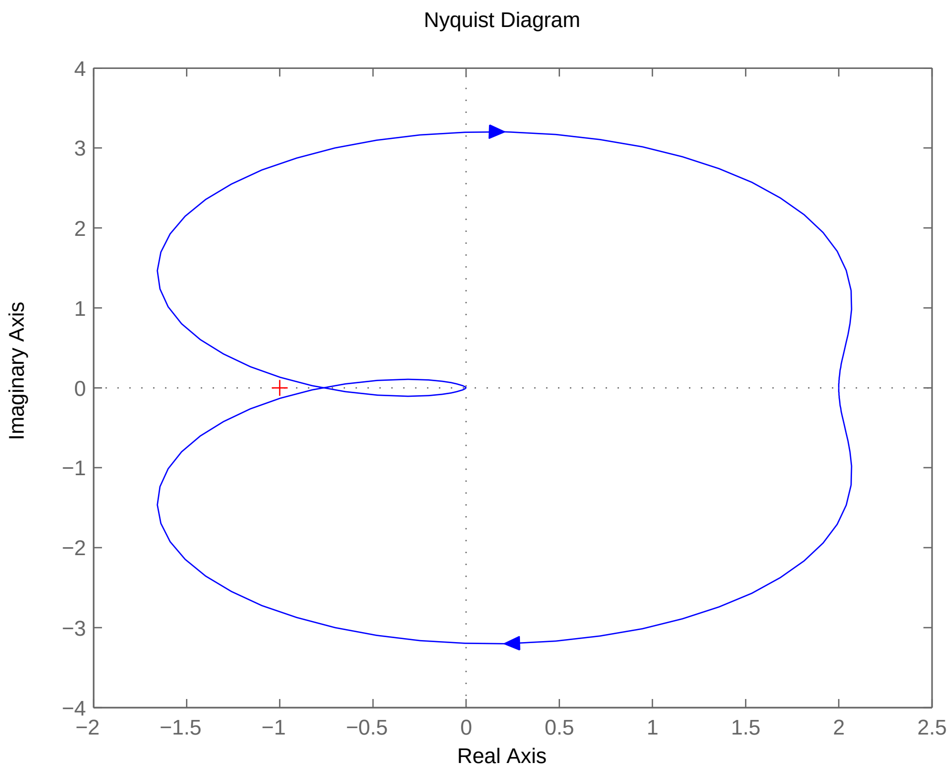
Parte B-II Il ritardo finito è approssimato da

$$H(s) = \frac{10}{10+s};$$

il guadagno ad anello aperto del sistema, senza la rete correttrice, è

$$L(s) = H(s)P(s) = \frac{10}{(10+s)(s^2+2s+10)} \ ,$$

dalla specifica sull'errore a regime abbiamo che $\frac{1}{1+kL(0)} = \frac{1}{3}$ e quindi $k = 20$, tracciamo il diagramma di Nyquist di $L_2(s) = kL(s)$,



l'intersezione con il cerchio unitario si trova in modo rapido tramite la tabella di Routh, tramite l'equazione

$$\eta + L_2(s) = 0 \rightarrow s^3 + 12s^2 + 30s + 100 + \frac{200}{\eta} = 0$$

e annullando la terza riga. Otteniamo l'equazione $100 + \frac{200}{\eta} - 30 \cdot 12 = 0$ Da qui si ottiene $\eta = 200/260 = 0.7692$ e l'equazione ausiliaria $12(j\omega^2 + 360)$ che corrisponde ad un margine di ampiezza di 1.3 assunto per $\omega_c = 5.477$.

Per progettare la rete ritardatrice prendiamo $\omega_0 < \omega_c$, ad esempio $\omega_0 = 4$, da cui

$$\phi = \pi + \arg(L_2(4j)) = 0.5468, \ M = \frac{3}{|P(4j)|} = 5.5709$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \rightarrow 0.8542 > 0.1795$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 2.2679$ e $\alpha = 0.1430$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 20\frac{1 + 0.3244s}{1 + 2.268s} = 2.860\frac{s + 3.083}{s + 0.4409} \ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri è dato da

$$C_d(z) = \frac{3.251z - 2.389}{z - 0.9569} \ .$$

Per quanto riguarda la correttezza del tempo di campionamento, abbiamo che il lo zero o polo piu' veloce del controllore è in -3.083, da cui deriva la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{3}\frac{1}{3.126} = 0.3397s$$

che risulta verificata, il tempo di campionamento è dunque sufficientemente piccolo.

Parte B-III

Abbiamo che

$$B^+ = (z - 0.1),\ B^- = 1,\ A^+ = (z + 0.6),\ A^- = (z - 1),$$

per avere errore nullo alla rampa occorre porre $q = 1$, visto che nel sistema è già presente un integratore. Poniamo

$$R(z) = R''(z)(z - 1)B^+,\ S(z) = S'(z)A^+(z),$$

i gradi sono dati da

$$\mathrm{gr}\{S'\} = \mathrm{gr}\{A^-\} + q - 1 = 1 + 1 - 1 = 1,\ \mathrm{gr}\{R''\} = \mathrm{gr}\{A\} - \mathrm{gr}\{B^+\} - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

l'equazione diofantea per il progetto di ragazzini diventa

$$r_0(z - 1)^2 + (s_1 z + s_0) = p(z),$$

dove $p(z)$ è il polinomio che contiene i poli del sistema retroazionato. Soddisfare la specifica equivale a prendere i poli all'interno del cerchio di raggio e^{-10T}, ad esempio prendiamoli nell'origine, scegliendo quindi $p(z) = z^2$, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} r_0 = 1 \\ -2r_0 + s_1 = 0 \\ r_0 + s_0 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$r_0 = 1,\ s_1 = 2,\ s_0 = -1$$

il controllore cercato è quindi

$$C(z) = \frac{(z + 0.6)(2z - 1)}{(z - 1)(z - 0.1)} \ .$$