Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 21 Giugno 2005

Parte A-I

1-
a- Definisci la trasformata zeta di una sequenza $u(k)$.
b- Enuncia il metodo dell'integrale di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta e dimostra il risultato presentato.

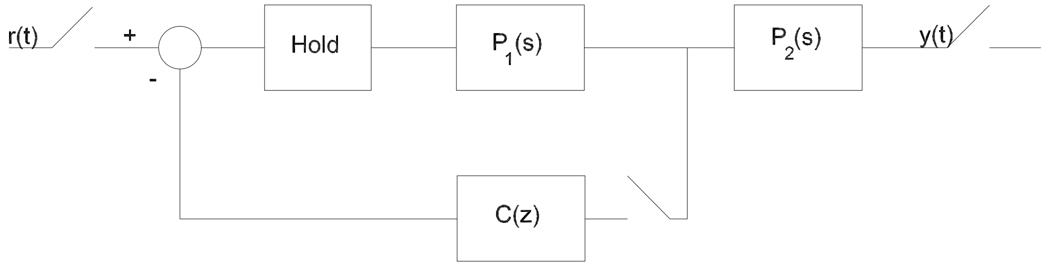
2 - Considera la trasformazione bilineare $z = T(w) = \frac{1+w}{1-w}$ e spiega come può essere utile per lo studio della stabilità dei sistemi discreti. Dimostra inoltre che

$$\begin{array}{l} |z| < 1 \text{ se } \operatorname{Re}\{w\} < 0 \\ |z| = 1 \text{ se } \operatorname{Re}\{w\} = 0 \\ |z| > 1 \text{ se } \operatorname{Re}\{w\} > 0 \,. \end{array}$$

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 21 Giugno 2005

Parte A-II

1- Considera il seguente sistema



con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+3},\ P_2(s) = \frac{s+3}{s+6},\ C(z) = k\frac{0.2-z}{z+0.2},$$

- Trasforma il sistema in modo che compaiano solo segnali discreti.
- Calcola la funzione di trasferimento tra l'ingresso campionato e l'uscita campionata.
- Valuta con il criterio di Jury la stabilità del sisitema al variare del parametro $K \in \mathbb{R}$

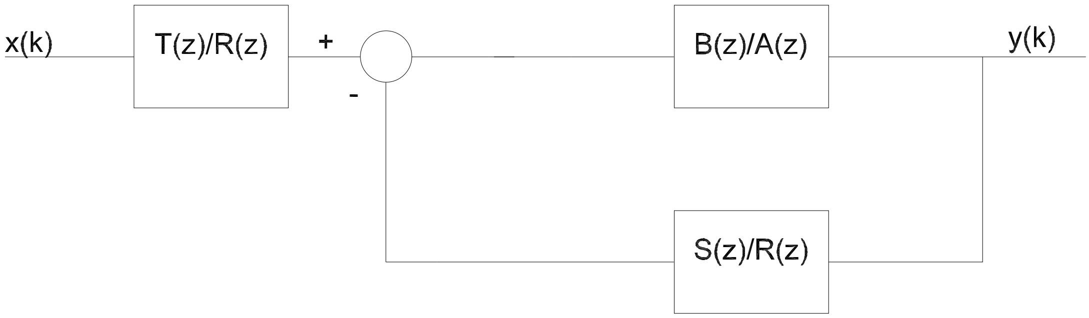
2- Risolvi la seguente equazione alle differenze, usando la trasformata zeta

$$\begin{cases} 2y(k) + 3y(k+1) + y(k+2) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 21 Giugno 2005

Parte B-I

Illustra il progetto analitico per il seguente sistema, in cui $\frac{B(z)}{A(z)}$ rappresenta l'impianto da controllare e $T(z)$, $R(z)$, $S(z)$ i polinomi del regolatore da determinare



il progetto deve prevedere la presenza di un'azione integrale di ordine q (q poli in 1) nel controllore e la cancellazione degli zeri stabili del sistema.

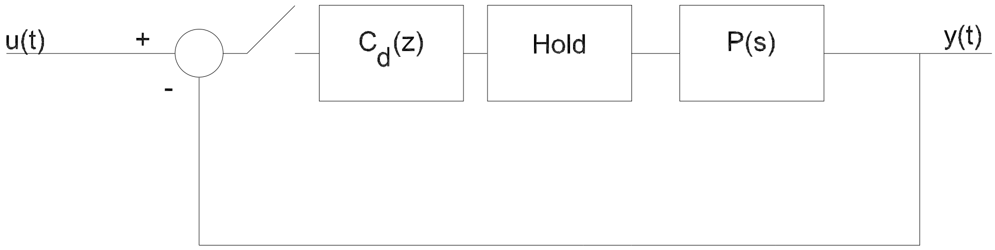
In particolare

- calcola la funzione di trasferimento complessiva del sistema
- presenta e giustifica le condizioni che deve rispettare la funzione di trasferimento $G_m(z)$ da imporre
- ricava l'equazione difantea e trova i gradi minimi dei polinomi incogniti che consentono di risolverla.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 21 Giugno 2005

Parte B-II

Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{4-s}{s(s+4)}.$$

Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete anticipatrice

$$C(s) = k\frac{1+\alpha s}{1+\tau\alpha s}$$

in modo da soddisfare le specifiche

- costante di velocità $K_v = 2$ (ricorda che $K_v = \lim_{s\to 0} L(s)s$, dove $L(s)$ è il guadagno di anello del sistema).
- margine di fase $M_f = 45°$

nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

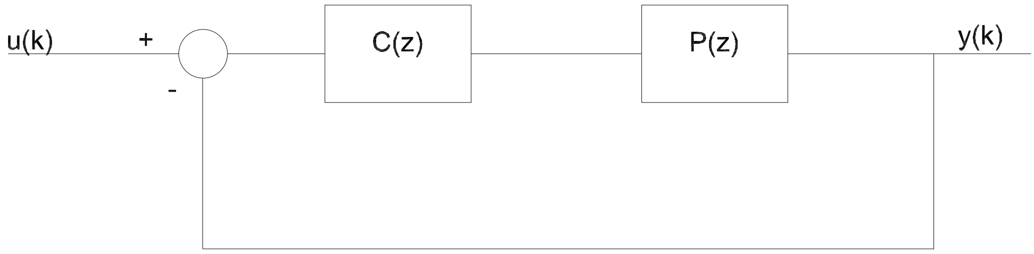
e considerare un tempo di campionamento $T = 0.05s$.

La discretizzazione va effettuata per mezzo della corrispondenza poli-zeri. Discutere se il tempo di campionamento scelto è appropriato.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Prova di Controlli Digitali del 21 Giugno 2005

Parte B-III

Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema in modo tale che la risposta alla rampa $u(k) = k \cdot 1(k)$ del sistema sia di tipo deadbeat, cioè l'errore si annulli dopo un numero finito di passi.



Con

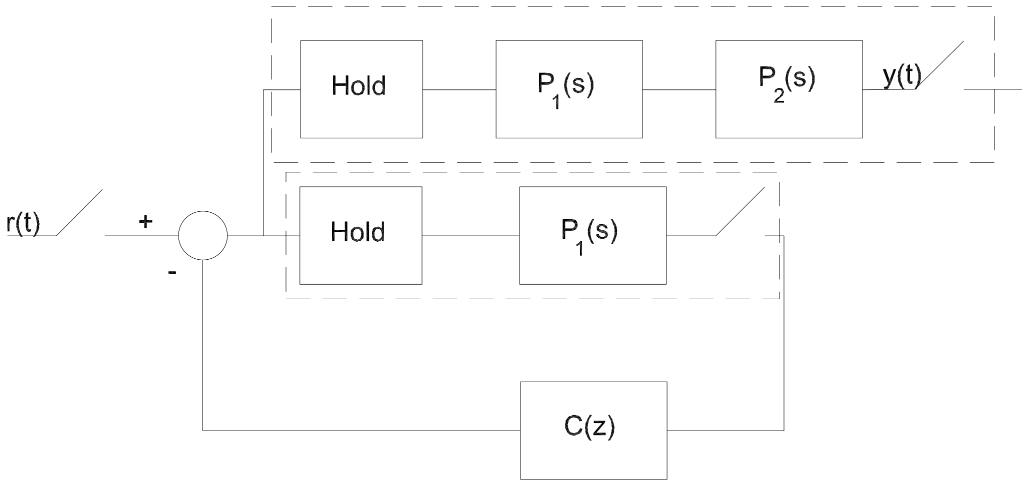
$$P(z) = \frac{(z-0.5)(z-2)}{(z-0.2)(z-1)} .$$

Nota che il sistema contiene già un polo in 1.

Soluzione:

Parte A-II

1- Lo schema può essere semplificato come segue



inoltre

$$\mathcal{Z}[H(s)P_1(z)]\mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+3}] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+3)}] = \frac{1}{3}\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3t}},$$

e

$$\mathcal{Z}[H(s)P_1(z)P_2(z)] = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s+6}] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+6)}] = \frac{1}{6}\frac{1-e^{-6T}}{z-e^{-6T}},$$

da cui la funzione di trasferimento risulta

$$T(z) = \frac{\mathcal{Z}[H(s)P_1(z)P_2(z)]}{1+\mathcal{Z}[H(s)P_1(z)]C(z)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1-e^{-6T}}{z-e^{-6T}}}{1+\frac{K}{3}\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}\frac{0.2-z}{z+0.2}} = \frac{(1-e^{-6T})(z+0.2)(z-e^{-3T})}{6(z-e^{-3T})(z+0.2)++2K(1-e^{-3T})(0.2-z)},$$

l'equazione caratteristica risulta

$$1+\mathcal{Z}[H(s)P_1(z)]C(z) = 1+\frac{K}{3}\frac{1-e^{-3T}}{z-e^{-3T}}\frac{0.2-z}{z+0.2}$$

da cui, sostituendo $T = 0.1s$, otteniamo il polinomio

$$G(z) = z^2 + z(-0.5408 - 0.0864k) + k0.0173 - 0.1482 = 0,$$

applichiamo il criterio di Jury, da cui

$$\begin{array}{l} 1 > |k0.0173 - 0.1482| \\ G(1) = -0.3110 - 0.0691K > 0 \\ G(-1) = 1.3926 + 0.1037K > 0 \end{array}$$

da cui otteniamo

$$-13.42 < K < 4.5\ .$$

2- Facendo la trasformata zeta, otteniamo

$$z^2Y(z) - z^2 + 3zY(z) - 3z + 2Y(z) = 0 \ ,$$

da cui

$$Y(z) = \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)},$$

antitrasformando con l'integrale di inversione

$$y(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(z)z^{k-1}dz = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^k(z+3)}{(z+1)(z+2)}, p_i) = (-1)^k 2 \cdot 1(k) - (-2)^k \cdot 1(k) \ .$$

Parte B-II Il ritardo finito è approssimato da

$$H(s) = \frac{40}{40+s};$$

il guadagno ad anello aperto del sistema, senza la rete correttrice, è

$$L(s) = H(s)P(s) = \frac{40(4-s)}{(40+s)(4+s)s}$$

dalla specifica sulla costante di velocità abbiamo che

$$\lim_{s\to 0} C(s)L(s)s = 2 \to K = 2 \ ,$$

tracciamo il diagramma di Nyquist di $L_2 = kL(s)$, la pulsazione per cui il diagramma attraversa il cerchio unitario si ottiene ponendo

$$2|L(s)| = 1 \to \frac{80\sqrt{16+\omega^2}}{\sqrt{40^2+\omega^2}\omega\sqrt{16+\omega^2}}$$

da cui $\omega = 2.00$, prendiamo $\omega_0 > \omega$, ad esempio $\omega_0 = 3$, da cui

$$\phi = 45^\circ - 180 - \arg(P(3j)) = 0.5765, \ M = \frac{1}{|P(3j)|} = 1.5042$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \to 0.8384 > 0.6648$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 0.4072$ e $\alpha = 0.2607$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 2\frac{1+0.4072s}{1+0.1062s} \ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri risulta

$$C_d(z) = K_d\frac{z - e^{-2.456\cdot 0.05}}{z - e^{-9.42\cdot 0.05}} = K_d\frac{z-0.8844}{z-0.6244} \ ,$$

K_d si trova imponendo $C_d(1) = C(0)$, da cui $K_d = 6.4983$. Per quanto riguarda la correttezza del tempo di campionamento, abbiamo che il lo zero o polo piu' veloce del controllore è in $-9,42$, da cui deriva la condizione approssimata

$$T < \frac{\pi}{3}\frac{1}{9.42} = 0.0834s$$

che risulta verificata, il tempo di campionamento è dunque sufficientemente piccolo.

Parte B-III

Abbiamo che

$$B^+ = (z-0.5),\ B^- = (z-2),\ A^+ = (z-0.2),\ A^- = (z-1),$$

il sistema contiene già un polo in 1, quindi per avere risposta di tipo deadbeat alla rampa occorre porre un solo polo nel controllore, quindi $q = 1$. Poniamo

$$R(z) = R''(z)(z-1)B^+,\ S(z) = S'(z)A^+(z),$$

i gradi sono dati da

$$\mathrm{gr}\{S'\} = \mathrm{gr}\{A^-\} + q - 1 = 1 + 1 - 1 = 1,\ \mathrm{gr}\{R''\} = \mathrm{gr}\{A\} - \mathrm{gr}\{B^+\} - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

l'equazione diofantea per il progetto deadbeat diventa

$$r_0(z-1)^2 + (s_1 z + s_0)(z-2) = z^2,$$

da cui si ha che si avrà errore nullo al terzo passo di campionamento. Dalla diofantea si ottiene il sistema

$$\begin{cases} r_0 + s_1 = 1 \\ -2r_0 + s_0 - 2s_1 = 0 \\ r_0 - 2s_0 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$r_0 = 4,\ s_1 = -3,\ s_0 = 2$$

il controllore cercato è quindi

$$C(z) = -\frac{(z-0.2)(3z-2)}{4(z-0.5)(z-1)}\ .$$