Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 22 Giugno 2009

1 (5 punti)- Dimostra che la trasformata di Laplace di un segnale campionato $x^*(t)$ è data da

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s - \frac{2\pi jk}{T}) \ .$$

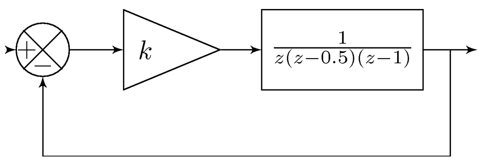
Disegna la posizione dei poli di $X^*(s)$, quando $X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ e $T = 1$.

2 (4 punti)- Presenta e dimostra la formula per il calcolo dell'equivalente a tempo discreto di un sistema a tempo continuo preceduto dal filtro di hold.

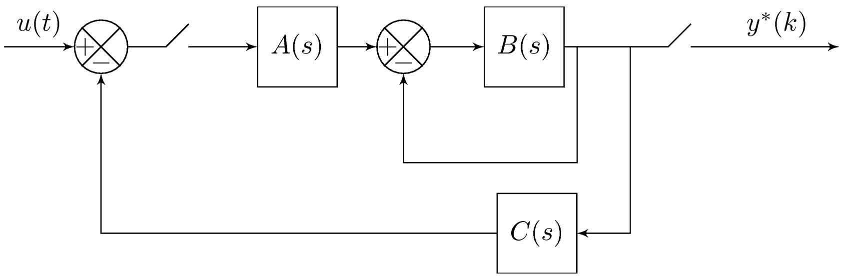
3 (4 punti)- Un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante, ha in ingresso il segnale $u(k) = 1(k)$ e l'uscita corrispondente è $y(k) = 0.5 + k$.
a- Determina la funzione di trasferimento del sistema.
b- Determina l'equazione alle differenze associata al sistema.

4 (5 punti)- All'inizio di ogni mese il signor Rossi deposita 200 euro sul proprio conto corrente. A fine mese la banca aggiunge al deposito del signor Rossi un interesse mensile dello 0.2 per cento.
a) Determina l'equazione alle differenze che descrive il valore del conto in banca del signor Rossi, rappresentato dalla successione $x(k)$.
b) Trova la successione $x(k)$, assumendo $x(0) = 0$.
c) Il signor Rossi vorrebbe comperare una barca a vela del costo di 40.000 euro. Quanti mesi impiegherà a raggiungere tale cifra?

5 (5 punti)- Determina i valori del guadagno $k \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile.



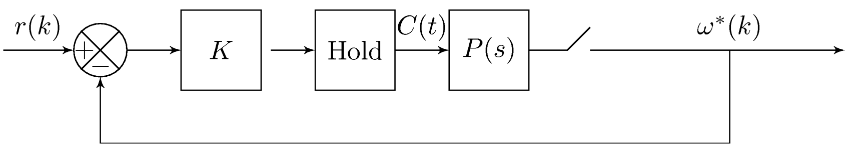

6 (5 punti)- Usa le regole di trasformazione e l'equivalente a tempo discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi a tempo discreto. Calcola la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita campionata $y^*(k)$.




7 (5 punti)- Nello schema seguente $P(s)$ rappresenta il motore di una barca, l'ingresso $C$ è la coppia esercitata dal motore mentre l'uscita $\omega(t)$ rappresenta la velocità di rotazione. Il termine $b$ è il coefficiente di smorzamento. Il sistema è descritto dalla seguente equazione differenziale

$$D\omega(t)I = -b\omega(t) + C(t) \ ,$$

Lasciare indicato il tempo di campionamento genericamente con $T$.

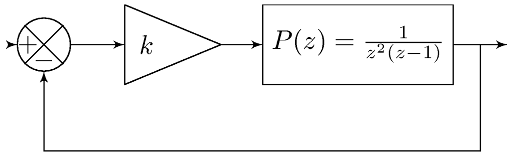



a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determina l'insieme dei valori del guadagno $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
c) Per i valori di $K$ trovati al punto b), determina il tempo di assestamento del sistema, cioè il tempo necessario a compiere il 90 percento dell'escursione complessiva con un gradino unitario in ingresso.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali per fuoricorso del 22 Giugno 2009 - Parte B

1- (7 p.) Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi a tempo discreto.

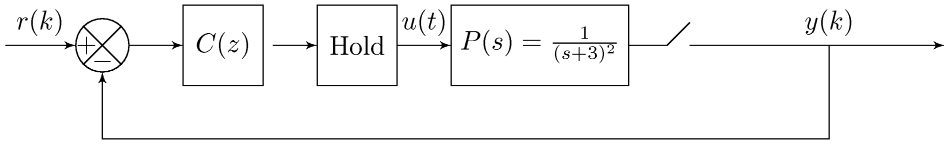
2- (9 p.) Considera il seguente sistema, in cui il tempo di campionamento è $T = 2$




a) Disegna il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema $P(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ e determina l'intervallo dei valori in $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema collegato in retroazione è asintoticamente stabile.

b) Determina il valore di $k$ per cui il sistema ha un margine di ampiezza pari a 2.

3- (9 p.) In un progetto per discretizzazione, considera lo schema seguente, dove $P(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ e il tempo di campionamento è pari a $T = 0.1$ s.

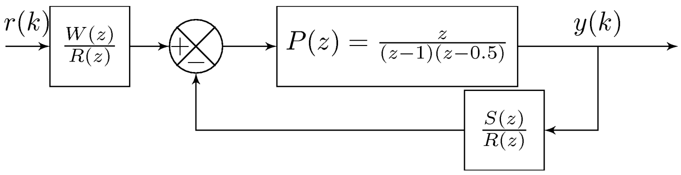



a- Trova un controllore $C(z)$ che garantisca errore a regime al gradino unitario pari a 1/20 e margine di ampiezza pari a 2. Il progetto va effettuato discretizzando con la trasformata di Tustin una rete ritardatrice di forma.

$$C_r(s) = k\frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \ .$$

b- Discuti la correttezza del tempo di campionamento con il criterio basato sulla pulsazione critica.

4- (8 p.) a) Progetta i due controllori $\frac{W(z)}{R(z)}$, $\frac{S(z)}{R(z)}$ per il seguente sistema




in modo che il controllore $\frac{S(z)}{R(z)}$ abbia grado relativo 1 e la funzione di trasferimento del sistema tra $r(k)$ ed $y(k)$ corrisponda ad un ritardo di due passi di campionamento.

b) E' possibile risolvere lo stesso problema per $P(z) = \frac{z-2}{(z+2)(z-1)}$ ? Perchè ?

Soluzione:
Domanda 3
a- Abbiamo $U(z) = \frac{z}{z-1}$, $Y(z) = 0.5\frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2}$, la funzione di trasferimento è quindi

$$T_x^y(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = 0.5 + \frac{1}{z-1} = \frac{0.5z + 0.5}{z-1} .$$

b- Otteniamo $Y(z)(1 - z^{-1}) = U(z)(0.5 + 0.5z^{-1})$, da cui, antitrasformando

$$y(k) = y(k-1) + 0.5u(k) + 0.5u(k-1) .$$

Domanda 4
a) $x(k+1) = 1.02x(k) + 200$
b) Dalla trasformata zeta, sapendo $x(0) = 0$, otteniamo

$$X(z) = 200\frac{z}{(z-1)(z-1.002)} ,$$

antitrasformando otteniamo

$$x(k) = 100000((1.002)^k - 1) ,$$

c) Dobbiamo risolvere

$$40000 = 100000((1.002^k - 1) ,$$

otteniamo

$$1.02^k = 1.4 \rightarrow e^{log(1.002)k} = 1.4 \rightarrow k = \frac{log(1.4)}{log(1.002)} = 168.4,$$

il signor Rossi impiegherà dunque 169 mesi a comprare la barca a vela, circa 14 anni.
Domanda 5
L'equazione caratteristica è

$$Q(z) = z^3 - 1.5z^2 + 0.5z + k,$$

le condizioni necessarie sono
1) $1 > |k| \rightarrow k \in (-1, 1)$
2) $q(1) > 0 \rightarrow k > 0$
3) $q(-1) < 0 \rightarrow k < 3$
la tabella di Jury è la seguente

| | $z^0$ | $z^1$ | $z^2$ | $z^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-1.5$ | 0.5 | $k$ |
| 2 | $k$ | 0.5 | $-1.5$ | 1 |
| 3 | $1-k^2$ | $*$ | $0.5+1.5k$ | |

l'ultima condizione è $|1-k^2| > |0.5+1.5k|$, visto che si è già posto $k > 0$ e $|k| < 1$, i due termini devono essere positivi e possiamo togliere i moduli, quindi $1 - k^2 > 0.5 + 1.5k$ da cui $k < 0.2807$. Complessivamente, quindi, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < k < 0.2807$.

Domanda 6
Applicando le regole di riduzione, si trova la seguente funzione di trasferimento

$$T_{u^*}^{y^*} = \frac{\mathcal{Z}[\frac{A(s)B(s)}{1+B(s)}]}{1 + \mathcal{Z}[C(s)\frac{A(s)B(s)}{1+B(s)}]} .$$

Domanda 7
Dall'equazione differenziale otteniamo che la funzione di trasferimento del sistema è data da

$$P(s) = \frac{1}{Is + b} .$$

Poniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{1}{s(Is+b)}] = \frac{1 - e^{-b/IT}}{b(z - e^{-b/IT})} ,$$

la funzione di trasferimento è quindi

$$T(z) = \frac{kL(z)}{1 + kL(z)} = \frac{k(1 - e^{-b/IT})}{b(z - e^{-b/IT}) + k(1 - e^{-b/IT})} .$$

b) Abbiamo $Q(z) = bz - be^{-b/IT} + k(1 - e^{-b/IT})$. Essendo un sistema del primo ordine la stabilità asintotica è equivalente a

$$|-e^{-b/IT}) + k(1 - e^{-b/IT})| < 1$$

quindi

$$-1 < k < \frac{1 + e^{-b/IT}}{1 - e^{-b/IT}} \; .$$

c) Con il gradino in ingresso, l'uscita del sistema è data da

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{k(1 - e^{-b/IT})}{b(z - e^{-b/IT}) + k(1 - e^{-b/IT})} \; .$$

da cui

$$y(k) = \frac{k}{b+k}(1 - p^k) \; ,$$

dove $p$ è il polo del sistema, dato da $p = e^{-b/IT} - k/b(1 - e^{-b/IT})$. Per avere un uscita al 90 percento dell'escursione dobbiamo porre $p^k = 9/10$, da cui $k = \frac{\log(9/10)}{\log p}$ , ed il tempo di assestamento è $T_a = kT = T\frac{\log(9/10)}{\log p}$.

Parte B

2- Facendo la trasformata di Tustin di $P(z)$ otteniamo

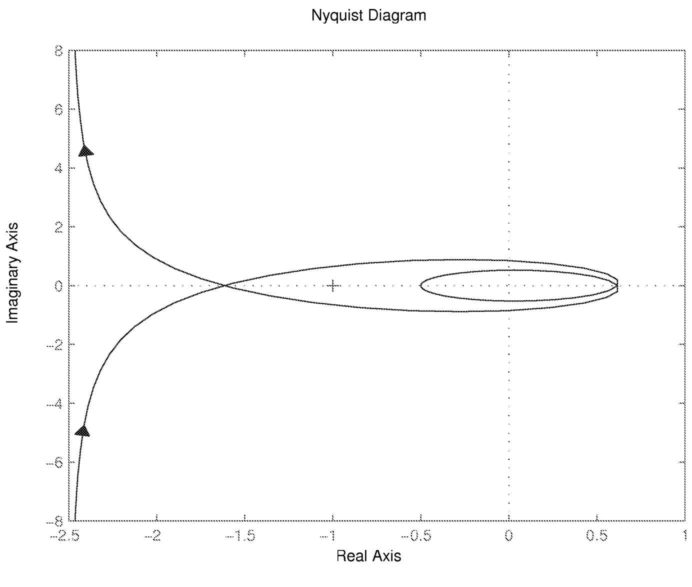
$$P_w(w) = \frac{(1-w)^3}{2w(1+w)^2} \; ,$$

è un sistema di tipo 1 con asintoto in $\sigma = -5/2$. Essendo $\lim_{\omega_w \to 0} \arg P_w(j\omega_w) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{\omega_w \to \infty} \arg P_w(j\omega_w) = -3\pi$, il diagramma di Nyquist compie un giro e un quarto in senso orario attorno all'asse reale. Per trovare le intersezioni con l'asse reale conviene porre

$$\arg P_w(j\omega_w) = -\pi \to \omega_w = \tan(\pi/10) \simeq 0.3249, P_w(j0.3249) = -1.6180 \; ,$$

$$\arg P_w(j\omega_w) = -2\pi \to \omega_w = \tan(3\pi/10) \simeq 1.37, P_w(j1.37) = 0.6180 \; .$$

Il diagramma risultante è il seguente



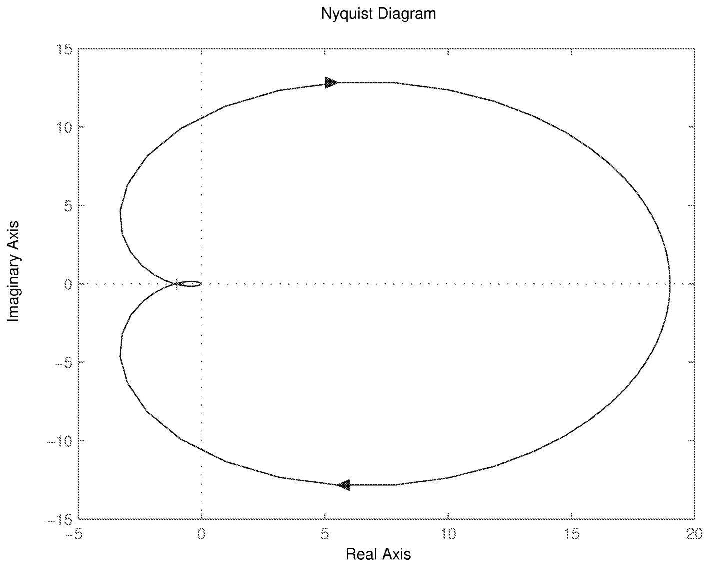

che va completato con un semicerchio in senso orario. il sistema è stabile se $-\frac{1}{k} < -1.6180$, cioè se $0 < k < 0.6180$. Per avere un margine di ampiezza pari a due occorre avere un guadagno pari a metà di quello massimo possibile, cioè $k = 0.3090$.

3- Nel progetto per discretizzazione approssimiamo il ritardo pari a $T/2$ nella forma $\frac{1}{1+sT/2} = \frac{20}{20+s}$ e consideriamo il sistema

$$P_d(s) = \frac{20}{(20+s)(s+3)^2} \; .$$

Per soddisfare alla specifica sul guadagno statico, occorre porre $kP_d(0) = 19$, da cui $k = 171$. Poniamo $L_2(s) = 171P_d(s)$.

Il diagramma di Nyquist di $L_2(s)$ è il seguente.




Per imporre il margine di ampiezza richiesto, prendiamo $\omega_0 = 7\text{rad/s}$, otteniamo $M = 2 * |P_s(7j)| = 5.5655$, $\phi = \pi + \arg(P_2(7j)) = 0.4731$. Verifichiamo che $M\cos\phi = 4.9541 > 1$. Dalle formule di inversione otteniamo $\alpha = 0.1519$, $\tau = 1.4658$, il controllore è dato dunque da

$$C_r(s) = 171\frac{1 + 0.2227s}{1 + 1.466s} \ ,$$

sostituendo $s \to \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = 20\frac{z-1}{z+1}$, otteniamo $C(z) = \frac{30.77z-19.49}{z-0.934}$. Il tempo di campionamento deve verificare la relazione

$$T < \frac{\pi}{4\omega_c} = 0.1122 \ ,$$

che risulta verificata. Il tempo di campionamento è appena sufficiente per il progetto considerato.

4- Per cancellare i poli e gli zeri stabili poniamo $S(z) = S'(z)(z - 0.5)$, $W(z) = W'(z)(z - 0.5)$,$R(z) = W'(z)z$. A questo punto la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita è data da

$$T_r^y = \frac{W'(z)}{(z-1)R'(z) + S'(z)} = \frac{A_0(z)}{z^2 A_0(z)} \ .$$

L'equazione diofantea è data da

$$(z-1)R'(z) + S'(z) = A_0(z)z^2 \ ,$$

il numero di equazioni è dato da $\text{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\text{Gr}[S'] + \text{Gr}[R'] + 2$, da cui $\text{Gr}[S'] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo pari ad 1, poniamo $\text{Gr}[R] = \text{Gr}[S'] + 1$, da cui $\text{Gr}[R'] = 1$, l'equazione diofantea è quindi

$$(z-1)(r_1 z + r_0) + s_0 = z^2 \ ,$$

la soluzione è data da

$$r_0 = 1, \ r_1 = 1, \ s_0 = 1 \ .$$

Poniamo quindi $A_0(z) = 1$ e il polinomi risultano

$$R(z) = (z+1)z, \ S(z) = (z - 0.5), \ W(z) = (z - 0.5) \ .$$