Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 22 Giugno 2007 - Parte A

1- (5 p.) Dimostra la seguente proprietà

$$\mathcal{Z}[kx(k)] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[x(k)] \ .$$

Usa questa proprietà per calcolare la trasformata zeta della sequenza $x(k) = ka^k$.

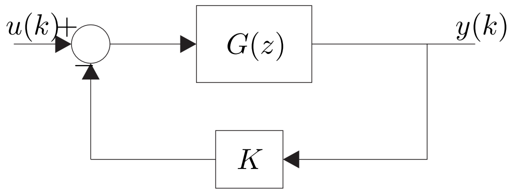
2- (5 p.) Calcola la risposta in frequenza $H(j\omega)$ del filtro di hold di ordine zero e traccia il grafico di $|H(j\omega)|$ in funzione di ω.

3- (6 p.) Considera il sistema a tempo discreto con ingresso $u(k)$ e uscita $y(k)$ descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$P(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0.4z + 0.13} \ ,$$

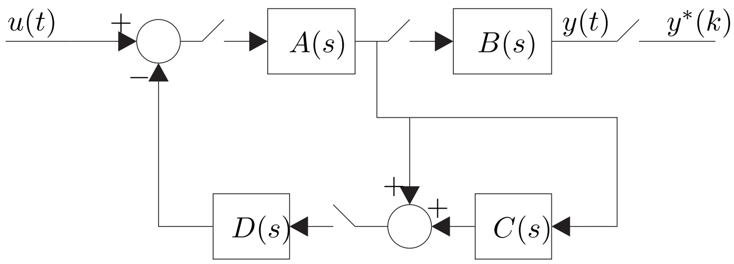
a) Determina la risposta all'impulso del sistema
b) Trova l'equazione alle differenze che lega i segnali $u(k)$ e $y(k)$
c) Calcola $\lim_{k\to+\infty} y(k)$ quando $u(k) = 1(k)$.

4- (7 p.) a)- Determina i valori di $K, a \in \mathbb{R}$ per cui il seguente sistema è asintoticamente stabile, con $G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-a)}$. e disegna la corrispondente regione sul piano (a, K).

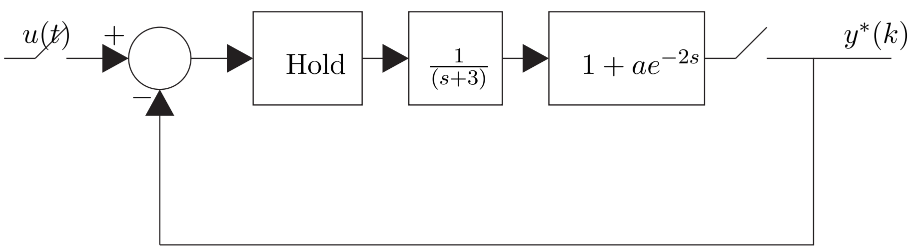


b) Supponiamo che il parametro a sia incerto, trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ che assicurano la stabilità asintotica del sistema per ogni valore di $a \in [-0.5,\ 0.5]$.

5- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.



6- (5 p.) a) Calcola la funzione di trasferimento del seguente sistema, dove $a \in \mathbb{R}$, assumendo il tempo di campionamento pari ad 1 secondo.



b) Determina il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui il sistema asintoticamente presenta l'uscita nulla in corrispondenza ad gradino unitario in ingresso.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 22 Giugno 2007 - Parte B

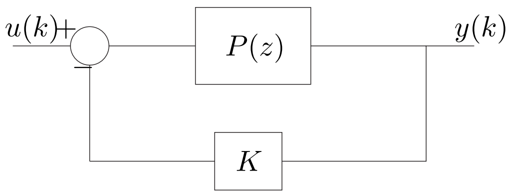
1- (7 p.) Presenta il metodo di discretizzazione basato sull'invarianza alla risposta ai segnali canonici, ricavando le formule usate per l'invarianza all'impulso, al gradino e alla rampa.

Discretizza il controllore $C(s) = \frac{1}{s(s-2)}$ usando il metodo dell'invarianza all'impulso.

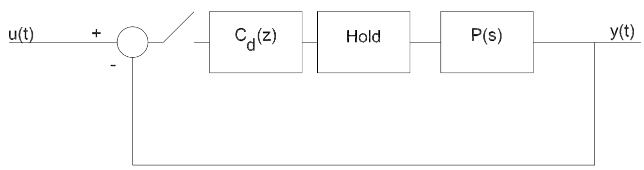
2- (8 p.) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s.

$$P(z) = \frac{2-z}{z(z+2)} \ .$$

Considera il sistema collegato in retroazione unitaria con guadagno k e trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile servendoti del diagramma di Nyquist disegnato.



3- (8 p.) Considera il seguente sistema



dove

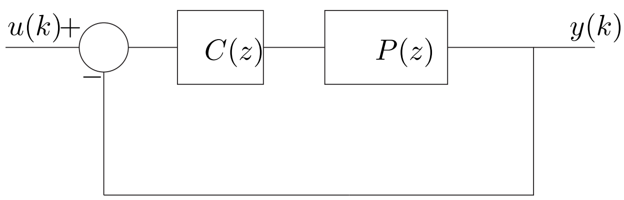
$$P(s) = \frac{(10-s)(s+20)}{2s(s+10)}.$$

Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete ritardatrice (a guadagno statico unitario) $C(s) = \frac{1+\tau\alpha s}{1+\tau s}$ in modo da avere il margine di fase pari a $M_F = 30$ gradi. Nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.1s$. La discretizzazione va effettuata per mezzo della corrispondenza poli-zeri.

4- a) (7 p.) Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(z) = \frac{1}{z^3} \ ,$$

in modo che il sistema abbia una risposta di tipo deadbeat al gradino unitario.

b) (3 p.- Fare per ultimo) Partendo dal risultato precedente, risolvi lo stesso problema considerando ora $P(z) = \frac{1}{z^l}$ con $l \in \mathbb{N}^+$.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) La risposta all'impulso è data da

$$\sum \mathrm{Res}(\frac{z^{k+1}}{z^2-0.4z+0.13}) = \sum \mathrm{Res}(\frac{z^{k+1}}{(z-(0.2+0.3j))(z-(0.2-0.3j))}) =$$

$$= 2\mathrm{Re}\{\mathrm{Res}(\frac{z^{k+1}}{(z-(0.2+0.3j))(z-(0.2-0.3j))}, 0.2+0.3j)\} = \frac{2}{0.6}\sqrt{0.13}^{k+1}\mathrm{Re}\{e^{\arctan(3/2)(k+1)-\pi/2}\} =$$

$$= 3.333(0.3606)^{k+1}\sin(\arctan(3/2)(k+1)) \; .$$

b) La funzione di trasferimento può essere scritta come

$$T(z) = \frac{1}{1-0.4z^{-1}+0.13z^{-2}} \; ,$$

antitrasformando la relazione $Y(z)(1-0.4z^{-1}+0.13z^{-2}) = U(z)$ otteniamo l'equazione alle differenze

$$y(k) - 0.4y(k-1) + 0.13y(k-2) = u(k) \; .$$

c) Applichiamo il teorema del valore finale

$$\lim_{k\to+\infty} y(k) = (z-1)\frac{z}{z-1}\frac{z}{z^2-0.4z+0.13}|_{z=1} = \frac{1}{0.73} = 1.3699.$$

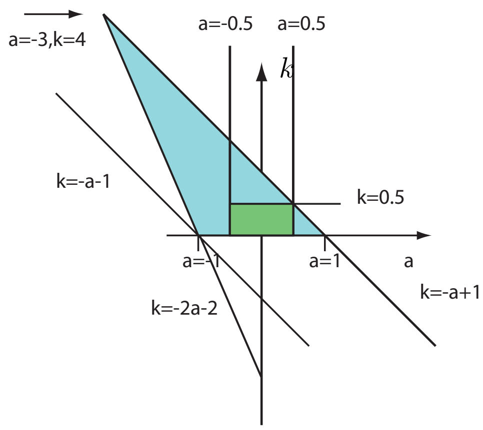
Domanda 4
a) La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{K}{(z-1)(z-a)+K} \; ,$$

applichiamo il criterio di Jury all'equazione caratteristica $q = z^2+z(-a-1)+a+K$, otteniamo le condizioni

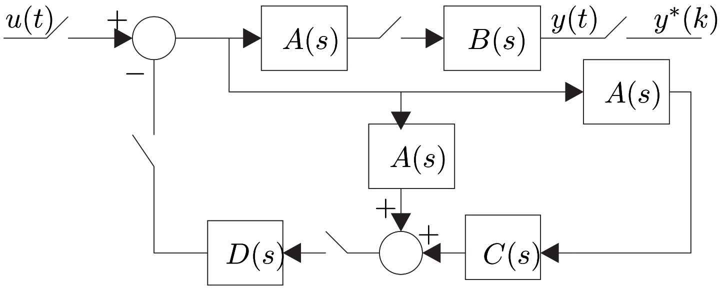
1) $1 > |a+K| \to -1-a < K < +1-a$
2) $q(1) > 0 \to K > 0$
3) $q(-1) > 0 \to K > -2-2a$

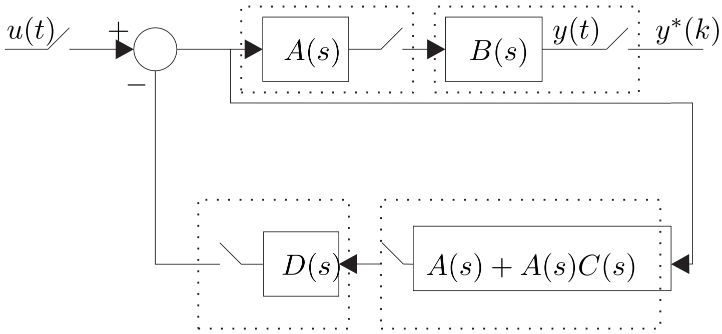
facendo l'intersezione di queste tre condizioni, troviamo il dominio rappresentato in blu in figura.



b) Dal grafico vediamo che se $a \in [-0.5, 0.5]$ la stabilità asintotica è garantita se $K \in (0, 0.5)$, nel rettangolo rappresentato in verde in figura.

Domanda 6
Lo schema si può trasformare nel seguente modo





facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{A(z)B(z)}{1 + D(z)((A(z)) + (AC)(z)} \ .$$

Domanda 7

a)

$$\mathcal{Z}[H(s)(1 + ae^{-2s})\frac{1}{s+3}] = (1 + az^{-2})\frac{z}{z-1}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+3)}] \ ,$$

inoltre

$$\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+3)}] = \frac{1}{3}\frac{z(1 - e^{-3T})}{(z-1)(z - e^{-3T})} \ ,$$

per cui, sostituendo il tempo di campionamento $T = 1\ s$, otteniamo

$$L(z) = \mathcal{Z}[H(s)(1 + ae^{-2s})\frac{1}{s+3}] = \frac{(z^2 + a)(1 - e^{-3})}{3z^2(z - e^{-3})} \ ,$$

la funzione di trasferimento è dunque

$$T(z) = \frac{(z^2 + a)(1 - e^{-3})}{3z^2(z - e^{-3}) + (1 - e^{-3})} \ .$$

b)Occorre annullare il guadagno statico del sistema retroazionato $T(z) = L(z)/(1 + L(z))$ cioè annullare $L(z)$, otteniamo quindi

$$\frac{(1 + a)(1 - e^{-3})}{3(1 - e^{-3})} = 0 \rightarrow a = -1 \ .$$

Parte B

2-

Applicando la trasformata di Tustin con $T = 2$ dobbiamo fare la sostituzione $z \rightarrow \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$P(w) = \frac{(1 - 3w)(1 - w)}{(1 + w)(3 - w)} = 1/3\frac{(1 - 3w)(1 - w)}{(1 + w)(1 - w/3)} \ ,$$

abbiamo $P(0) = 1/3$, $\lim_{w\to+\infty} P(w) = -3$, calcoliamo le intersezioni con l'asse reale. Consideriamo il polinomio $\eta + P(w)$, otteniamo

$$w^2(3-\eta) + w(2\eta - 4) + (3\eta + 1) = 0\ ,$$

la possibile intersezione con l'asse reale avviene se

$$2\eta - 4 = 0 \to \eta = 2\ ,$$

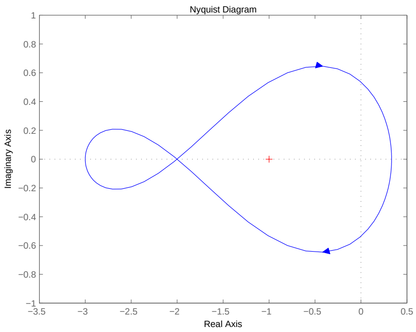
sostituendo questo valore di η nel polinomio otteniamo

$$w^2 + 5 = 0 \to w = \pm j\sqrt{5}\ ,$$

quindi l'intersezione con l'asse reale avviene il 2, alla pulsazione (nel piano w) $\omega_w = \sqrt{5}$ rad/s. Infine abbiamo

$$\arg(P(j\omega_w)) = -\arctan(3\omega_w) - 2\arctan(\omega_w) + \arctan(\omega_w/3)\ ,$$

il diagramma percorre quindi 1/2 giro in senso orario. Usando queste informazioni possiamo ricavare il seguente grafico.



Il sistema ha un polo instabile, è quindi asintoticamente stabile per i valori di k per cui il punto critico $-1/k$ viene circondato 1 volta in senso antiorario

$$-3 < -1/k < -2 \to k \in [1/3, 1/2]\ .$$

3-

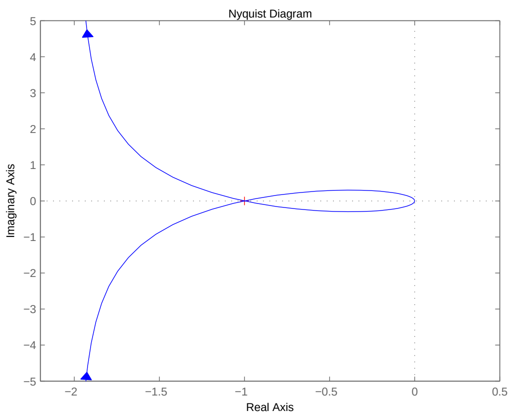
Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{20}{20+s}\ ,$$

da cui

$$P_2(s) = P(s)H(s) = 10\frac{10-s}{s(s+10)}\ ,$$

Il diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale in $\sigma = -2$, interseca l'asse reale in -1, per $\omega_c = 10$ rad/s ed è il seguente



il margine di fase è pari a 0, visto che l'intersezione con il cerchio unitario avviene in ω_c.

Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 5$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P(j)) - M_F = 0.1199,\ M = |P(j)| = 2$$

la condizione $M\cos(\phi) = 1.9856 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 1.684$ e $\alpha = 0.4893$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = \frac{1 + 0.824s}{1 + 1.684s} \ .$$

il controllore discretizzato attraverso la corrispondenza poli-zeri è dato da

$$C_d(z) = 0.50447 \frac{z - 0.8857}{z - 0.9423} \ .$$

3- a) Poniamo $S(z) = z^3 S'(z)$, $R(z) = (z-1)R'(z)$, la funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{(z-1)R'}{(z-1)R' + S'} \ ,$$

per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'] + 2$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S'] + \mathrm{Gr}[R] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[S] = 0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R'] + 1 = \mathrm{Gr}[S'] + 3$, da cui $\mathrm{Gr}[R] = 2$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$(r_2 z^2 + r_1 z + r_0)(z - 1) + s_0 = z^3 \ ,$$

da cui otteniamo il sistema

$$r_2 = 1; (r_1 - r_2) = 0; (r_0 - r_1) = 0; s_0 - r_0 = 0$$

da cui

$$r_2 = 1,\ r_1 = 1,\ r_0 = 1,\ s_0 = 1$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z^2 + z + 1} = \frac{z^3}{z^3 - 1} \ .$$

b) Se $P(z) = \frac{1}{z^l}$, possiamo ripetere il procedimento precedente. Oppure possiamo immaginare che il controllore abbia la stessa struttura del primo caso, cioè

$$C(z) = \frac{z^l}{z^l - 1}$$

e verifichiamo se le specifiche sono soddisfatte. La funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{z^l - 1}{z^l - 1 + 1} = \frac{(z-1)(z^{l-1} + z^{l-2} + \ldots + 1)}{z^l} \ ,$$

l'errore è dato da $E(z) = T(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z^l + z^{l-1} + \ldots + z}{z^l}$, la risposta è quindi di tipo deadbeat perchè l'errore si annulla dopo l passi.