Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 24 Novembre 2008 - Parte A

1- (5 p.) Presenta e dimostra la seguente proprietà ,

$$\mathcal{Z}[x(k) \star y(k)] = \mathcal{Z}[x(k)]\mathcal{Z}[y(k)] \ ,$$

nell'ipotesi $x(k) = y(k) = 0$, se $k < 0$.

2- (5 p.) Definisci i concetti di funzione di trasferimento e di risposta all'impulso per un sistema a tempo discreto, lineare e tempo invariante.

3- (5 pt.) a- Determina la funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto causale che ha la seguente risposta all'impulso per $k \geq 0$

$$h(k) = \begin{cases} 1 \text{ se } k \text{ pari} \\ 2 \text{ se } k \text{ dispari} \ . \end{cases}$$

b- Determina la risposta al gradino unitario dello stesso sistema.

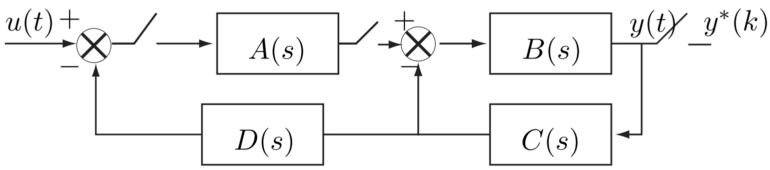
4- (6 p.) a) Risolvi la seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} x(k+2) = 2x(k+1) + x(k) \\ x(0) = 0, \ x(1) = 1 \ . \end{cases}$$

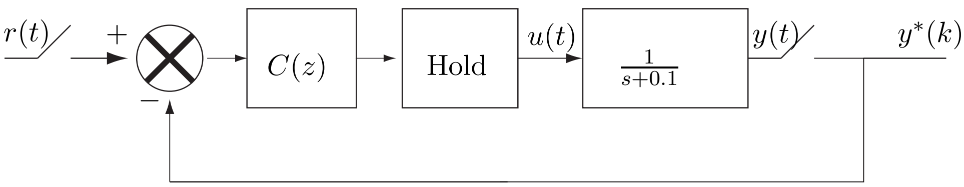
b) Determina il seguente limite

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x(k+1)}{x(k)} \ .$$

5- (5 p.) Usa le regole di trasformazione e l'equivalente discreto per trasformare il seguente sistema in uno che contenga solo blocchi discreti. Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(k)$ e l'uscita $y^*(k)$.



6- (7 p.) Il seguente schema rappresenta il sistema di controllo del livello di liquido in un serbatotio per un processo chimico. Il segnale $u(t)$ rappresenta la portata di fluido in ingresso, $y(t)$ il livello del fluido e $r(t)$ il livello di riferimento. Il tempo di campionamento è pari a 1 secondo.



Assumere $C(z) = k_p + k_i \frac{z}{z-1}$.
a) Calcola la funzione di trasferimento del sistema.
b) Determina i valori dei guadagni k_i e k_p per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 24 Novembre 2008 - Parte B

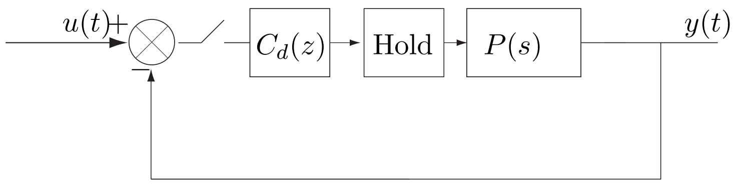
1- (7 p.) Presenta e dimostra il metodo di discretizzazione basato sull'invarianza della risposta ai segnali canonici (impulso, gradino e rampa). Discretizza il seguente sistema a tempo continuo con il metodo dell'invarianza rispetto all'impulso

$$P(s) = \frac{1}{s} \ .$$

2- (8 p.) Disegna il diagramma di Nyquist per il seguente sistema a tempo discreto, assumendo il tempo di campionamento pari a $T = 2$ s e $0 < a < 1$

$$P(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \ .$$

3- (9 p.) Considera il seguente sistema, dove $P(s) = \frac{1}{(s+2)^3}$.

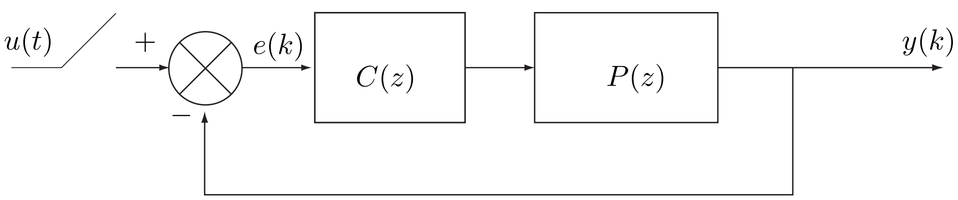


Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete ritardatrice $C(s) = K\frac{(1+\tau\alpha s)}{1+\tau s}$, in modo da avere il margine di fase pari a 45° e errore a regime al gradino unitario pari ad 1/10. Nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.01s$. La discretizzazione va effettuata per mezzo della trasformata di Tustin. Verifica la correttezza del tempo di campionamento attraverso il criterio che fa riferimento alla pulsazione critica di attraversamento dell'asse reale.

4- (9 p.) a- Progetta il controllore $C(z)$ per il seguente sistema, in modo tale che quando in ingresso c'è la parabola $u(t) = \frac{t^2}{2}$ il segnale errore $e(k)$ si annulli in un numero finito di passi. Assumi il tempo di campionamento pari a $T = 1$.



L'impianto è dato da

$$P(z) = \frac{z}{(z-0.1)(z-0.5)} \ .$$

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
a) Possiamo scrivere il segnale $h(k)$ nella forma seguente

$$h(k) = 3/2 - 1/2(-1)^k \ ,$$

da cui

$$H(z) = 3/2\frac{z}{z-1} - 1/2\frac{z}{z+1} = \frac{z(z+2)}{(z^2-1)} \ .$$

b) La risposta al gradino si può ottenere antitrasformando

$$H(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z^2(z+2)}{(z^2-1)(z-1)} \ ,$$

oppure facendo la sommatoria

$$\sum_{i=0}^{k} h(k) = 3/2k - 1/4(1+(-1)^k) \ .$$

Domanda 4
a- Passando alla trasformata zeta, otteniamo

$$z^2X(z) - z = 2zX(z) + X(z) \rightarrow X(z) = \frac{z}{z^2-2z-1} = \frac{z}{(z-1-\sqrt{2})(z-1+\sqrt{2})} \ ,$$

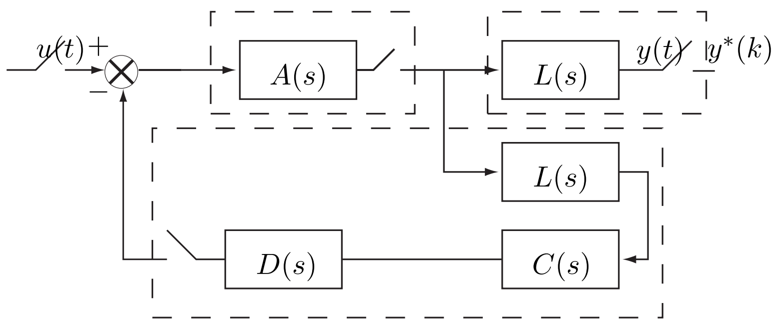
da cui otteniamo, antitrasformando

$$x(k) = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^k - (1-\sqrt{2})^k) \ .$$

b- Otteniamo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k+1)}{x(k)} = 1+\sqrt{2} \ .$$

Domanda 5
Lo schema si può trasformare nel seguente modo



dove $L(s) = \frac{B(s)}{1+B(s)C(s)}$, facendo la trasformata dei blocchi tratteggiati, otteniamo

$$T(z) = \frac{A(z)\mathcal{Z}[L(s)]}{1+A(z)\mathcal{Z}[C(s)D(s)L(s)]} \ .$$

Domanda 6
L'equivalente a tempo discreto della serie del filtro di hold e del sistema a tempo continuo è dato da

$$P(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s+0.1)}] = \frac{z-1}{z}\frac{z10(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{10(1-e^{-1})}{z-e^{-1}} \ .$$

La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{C(z)P(z)}{1 + C(z)P(z)} = \frac{10(1 - e^{-0.1})(k_p(z-1) + k_i z)}{10(1 - e^{-0.1})(k_p(z-1) + k_i z) + (z-1)(z - e^{-0.1})} \ ,$$

L'equazione caratteristica è la seguente

$$q(z) = z^2 + z(-1 - e^{-0.1} + 10(1 - e^{-0.1})(k_p + k_i)z) + e^{-0.1} - 10(1 - e^{-0.1})k_p \ , ,$$

le condizioni per la stabilità asintotica sono date da

$$1) 1 > |e^{-0.1} - 10k_p(1 - e^{-0.1})| \rightarrow k_p > -0.1 \text{ e } k_p < \frac{1 + e^{-0.1}}{10(1 - e^{-0.1})},$$

$$2) q(1) > 0 \rightarrow k_i > 0 \ ,$$

$$3) q(-1) < 0 \rightarrow -k_p + \frac{1 + e^{-0.1}}{5(1 - e^{-0.1})} \ ,$$

attraverso queste condizioni è possibile rappresentare sul piano k_i, k_p i valori dei parametri che garantiscono la stabilità asintotica.

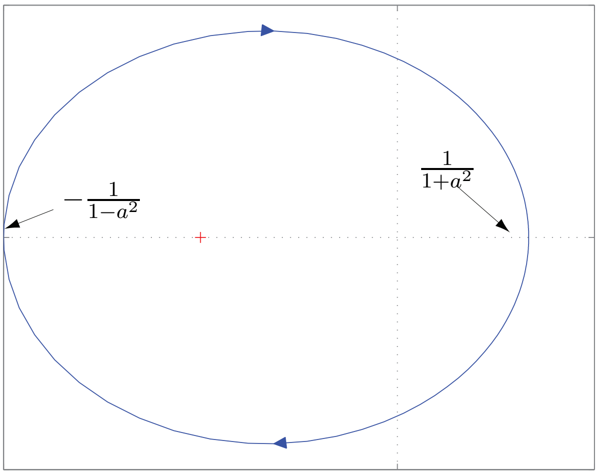
Parte B

2-

Possiamo applicare la trasformata di Tustin direttamente al sistema, il modo più semplice è però quello di tracciare prima il diagramma della funzione

$$P_2(y) = \frac{1}{y + a^2} \ .$$

che si ottiene sostituendo a z^2 la variabile y. Se $y = e^{j2\omega T}$ allora $z = \sqrt{y} = e^{j\omega T}$, quindi il diagramma di Nyquist di $P(z)$ si ottiene percorrendo due volte il diagramma di Nyquist di $P_2(y)$. Il diagramma di Nyquist di $P_2(y)$ si può ottenere passando al piano w ed è il seguente



il diagramma di $P(z)$ si ottiene percorrendo questo diagramma per due volte.

3-

Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{200}{200 + s} \ ,$$

da cui

$$P_2(s) = P(s)H(s) = \frac{200}{(s+2)^3(s+200)} \ ,$$

per avere errore a regime al gradino pari ad 1/10, deve valere la condizione

$$1/9 = \frac{1}{P_2(0)C(0)} \rightarrow K = 72 \ ,$$

poniamo

$$L(s) = KP_2(s) = 9\frac{1}{(1+s/2)^3(1+s/200)} \ ,$$

disegnamo il diagramma di Nyquist di $L(s)$, abbiamo

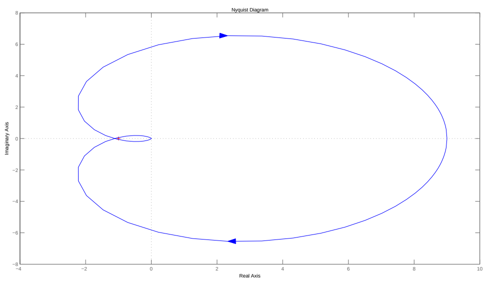
$$L(0) = 9 \ , \lim_{\omega \to \infty} L(j\omega) = 0 \ .$$

Calcoliamo l'intersezione con l'asse reale, deve valere la condizione

$$3 \arctan \frac{\omega}{2} + \arctan(\omega/200) = \pi \ ,$$

possiamo trascurare la seconda arcotangente, dato che l'argomento è diviso per 200, ottenendo $\omega_c \simeq 2\tan(\pi/3) = 3.46$. Inoltre $L(3.46j) \simeq -1.125$ che rappresenta il punto di intersezione con l'asse reale. Senza la rete correttrice il sistema è dunque instabile.

Il diagramma di Nyquist è il seguente.



Applichiamo le formule di inversione. Dobbiamo prendere ω_0 in modo tale che l'argomento di $L(\omega_0 j)$ sia maggiore di $-\Pi + M_f = -2.35$. Ad esempio per $\omega_0 = 1$, $\arg L(j) = -1.39$.

Vogliamo portare questo punto in corrispondenza di $e^{-3/4j\Pi}$ per avere il margine di fase voluto. Il ritardo di fase è dato da $\phi = \pi - M_F + \arg L(j) = 0.9603$, l'attenuazione di ampiezza da $M = 2 \cdot 3.199 = 6.398$.

La condizione $M\cos(\phi) = 3.69 > 1$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 7.16$ e $\alpha = 0.0713$, il controllore a tempo continuo risulta dunque

$$C(s) = 72\frac{1 + 0.5102s}{1 + 7.16s)} \ .$$

il controllore discretizzato attraverso la regola di Tustin si ottiene attraverso la sostituzione $s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{100}\frac{z-1}{z+1}$.

$$C_d(z) = \frac{5.177z - 5.077}{z - 0.9986} \ .$$

Valutiamo la scelta del tempo di campionamento. La pulsazione critica adesso è pari a $\omega_0 = 2.13$, la condizione

$$T < \frac{\pi}{10\omega_0} = 0.1475 \ ,$$

è verificata, il tempo di campionamento scelto è dunque corretto.

4-

a) Sia $C(z) = \frac{S(z)}{R(z)}$, cancelliamo i poli e gli zeri stabili ponendo $R(z) = R'(z)z$, $S(z) = S'(z)(z - 0.1)(z - 0.5)$. La funzione di trasferimento tra ingresso ed errore è data da

$$T(z) = \frac{1}{1 + C(z)P(z)} = \frac{R'(z)}{R'(z) + S'(z)} \ ,$$

essendo $U(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$, il segnale errore è dato da

$$E(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \frac{R'(z)}{R'(z) + S'(z)} ,$$

per annullare l'errore in un numero finito di passi dobbiamo far si che il denominatore di $E(z)$ sia una potenza di z. Poniamo

$$R'(z) = R''(z)(z-1)^3 ,$$

l'equazione diofantea è data dunque da

$$R''(z)(z-1)^3 + S' = z^l ,$$

con l da determinare.

Per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da $\mathrm{Gr}[R'']+4$, il numero di incognite è dato da $\mathrm{Gr}[S']+\mathrm{Gr}[R'']+2$, da cui $\mathrm{Gr}[S'] = 2$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S]$ da cui $\mathrm{Gr}[R''] + 4 = \mathrm{Gr}[S'] + 2$, da cui $\mathrm{Gr}[R] = 0$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$r_0(z-1)^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0 = z^3 ,$$

da cui

$$r_0 = 1,\ s_2 = 3 s_1 = -3,\ s_0 = -1 ,$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z) = \frac{(z-0.1)(z-0.5)(3z^2 - 3z - z)}{z(z-1)^3} .$$