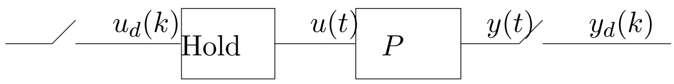
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 24 Novembre 2006
Parte A

1- Presenta e dimostra la formula di inversione per il calcolo dell'antitrasformata zeta.

2- Presenta il filtro di ricostruzione ideale di un segnale campionato (scrivi sia la risposta all'impulso che quella in frequenza). Presenta inoltre il filtro di hold e illustra i problemi legati all'uso di questo filtro ricostruttre nei sistemi di controllo.

3- Determina la *funzione di trasferimento* tra i segnali $u_d(k)$ e $y_d(k)$ e la corrispondente *risposta all'impulso* nel seguente sistema discreto

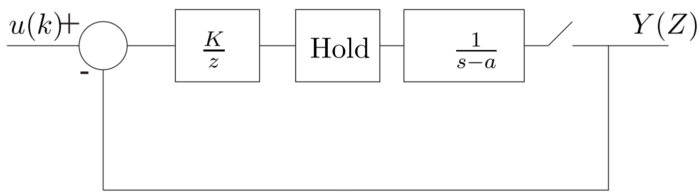


in cui P è un sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y = u(t) \ .$$

Rappresenta inoltre le risposte all'impulso del sistema continuo e di quello discreto su uno stesso grafico. Assumi il tempo di campionamento pari a $T = 1$.

4- Considera il seguente sistema, assumendo $a > 0$,



a- Trasforma il sistema in uno in cui compaiono solo blocchi discreti.
b- Determina l'insieme dei valori di $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile (lascia il tempo di campionamento T e il parametro a in forma simbolica).
c- Assumendo $T = 1$, calcola il massimo valore di a per cui esiste un guadagno K stabilizzante.

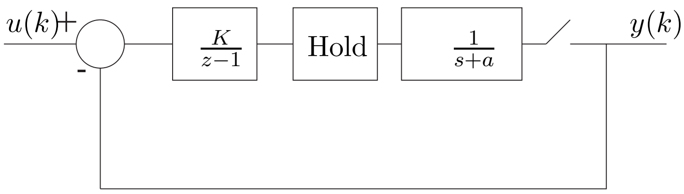
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 24 Novembre 2006
Parte B

1-

Illustra i criteri che conosci per la scelta del tempo di campionamento nei sistemi di controllo digitale e spiega in quali modi puoi tenere conto del ritardo associato al filtro di hold.

2-

Considera il seguente sistema



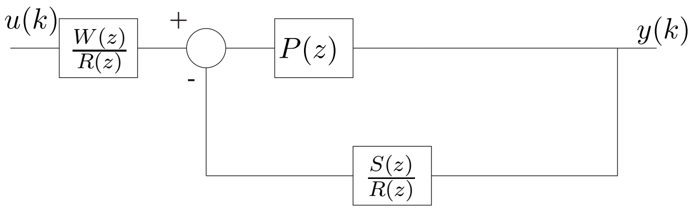
a- Determina la funzione di trasferimento ad anello aperto $T(z)$ del sistema.

b- Disegna il diagramma di Nyquist di $T(z)$, prendendo il guadagno $K = 1$, servendoti della trasformazione bilineare $z = \frac{1+w}{1-w}$ e ponendo $T = 1$ e $a = \log 2$.

c- Determina l'insieme dei valori di $K \in \mathbb{R}$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

3-

Progetta i polinomi $W(z)$, $S(z)$, $R(z)$ per il seguente sistema



con $P(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, in modo che l'uscita sia una copia ritardata dell'ingresso.

Qual'è l'errore alla rampa di questo sistema?

Soluzione:

Parte A

Domanda 3

Facendo la trasformata di Laplace delle funzioni che compaiono nell'equazione differenziale, otteniamo

$$(s^2+3s+2)Y(s) = U(s) \rightarrow P(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \ ,$$

discretizzando il sistema otteniamo

$$\begin{aligned} &P(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\tfrac{1}{s(s+2)(s+1)}] = (1-z^{-1})(\tfrac{1/2}{s} + \tfrac{1/2}{s+2} - \tfrac{1}{s+1}) = \\ &= (1-z^{-1})(\tfrac{1/2z}{z-1} + \tfrac{1/2z}{z-e^{-2T}} - \tfrac{1z}{z-e^{-T}} = 1/2 + \tfrac{1/2(z-1)}{z-e^{-2T}} - \tfrac{z-1}{z-e^{-T}} = \tfrac{z(e^{-2T}-2e^{-T}+1)+e^{-3T}+e^{-T}+2e^{-2T}}{2(z-e^{-2T})(z-e^{-T})} \ . \end{aligned}$$

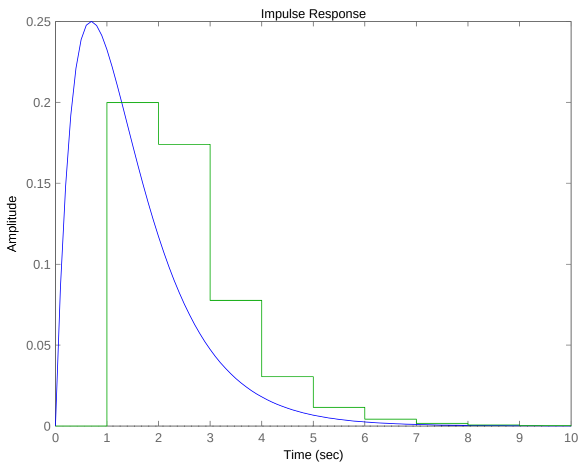
La risposta all'impulso del sistema continuo $P(s)$ è data da

$$p(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\} = -e^{-2t} + e^{-t} \ ,$$

quella del sistema discretizzato è data da $p^*(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{P(z)\}$, oppure può essere calcolata come

$$p^*(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{P(z)\} = \int_{(k-1)T}^{(k)T} p(t)dt = -\frac{1}{2}e^{-2kT}(1-e^{2T}) + e^{-kT}(1-e^{T}) \ .$$

I due grafici sono riportati in figura.



Domanda 4

L'equivalente discreto del sistema continuo preceduto dall'hold è dato da

$$P(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{s(s-a)}] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{1}{a}(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-a})] = \frac{z-1}{az}(-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{aT}}) = \frac{e^{aT}-1}{a(z-e^{aT})} \; ,$$

l'equazione caratteristica è data da $1 + \frac{k}{z}P(z) = 0$, cioè

$$(z - e^{aT})z + a^{-1}k(e^{aT} - 1) = 0 \rightarrow z^2 - e^{aT}z + a^{-1}k(e^{aT} - 1) = 0 \; ,$$

valutiamo la stabilità attraverso il criterio di Jury, occorre

$$1 > |a^{-1}k(e^{aT} - 1)| \rightarrow |k| < \frac{a}{e^{aT} - 1}$$

$$1 - e^{aT} + a^{-1}k(e^{aT} - 1) > 0 \rightarrow k > a \; ,$$

$$1 + e^{aT} + a^{-1}k(e^{aT} - 1) > 0 \rightarrow k < \frac{a(1 + e^{aT})}{e^{aT} - 1}$$

la terza condizione è implicata dalla prima, dunque può essere non considerata. Le prime due sono verificate se

$$a < k < \frac{a}{e^{aT} - 1} \; ,$$

al crescere di a i due estremi dell'intervallo si avvicinano fino ad incontrarsi per

$$a = \frac{a}{e^{aT} - 1} \rightarrow a = \frac{\log 2}{T} \; .$$

Parte B

2-

L'equivalente discreto della serie del filtro di hold e del sistema continuo è dato da

$$HP(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{P(s)}{s}] = \frac{1 - e^{-aT}}{a(z - e^{-aT})} \; ,$$

la funzione di trasferimento ad anello aperto è data da

$$L(z) = 1 + \frac{K}{z-1}HP(z) = 1 + \frac{K(1 - e^{-aT})}{a(z-1)(z - e^{-aT})} \; ,$$

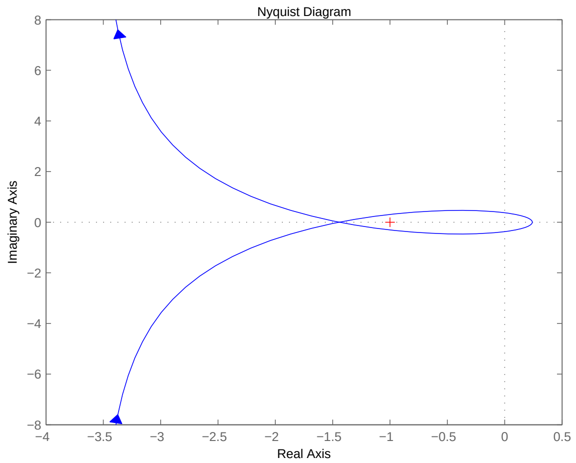
ponendo $T = 1$ e $a = \log 2$ otteniamo

$$L(z) = \frac{K(1 - 0.5)}{\log 2(z-1)(z-0.5)} = 1 + \frac{0.5K}{\log 2(z-1)(z-0.5)} \; ,$$

per fare il diagramma di Nyquist facciamo la sostituzione $z = \frac{1+w}{1-w}$, ottenendo

$$L(z) = \frac{0.5K(1-w)^2}{2\log 2w(1.5w + 0.5)} = \frac{0.5K}{\log 2}\frac{(1-w)^2}{w(1+3w)} \; ,$$

il diagramma di Nyquist corrispondente è il seguente, che va completato con un semicerchio all'infinito percorso in senso orario,



in particolare l'intersezione con l'asse reale avviene per $w = -\frac{1}{\log 2} = -1.4427$, si ha stabilità asintotica dunque per

$$K < \log 2 = 0.6931 \ .$$

4- La funzione di trasferimento del sistema è data da

$$T(z) = \frac{W(z)}{R(z)(z-2)^2 + S(z)} \ ,$$

che occorre rendere uguale ad una funzione del tipo z^{-l}, che corrisponde ad un ritardo di l passi, in modo da soddisfare alla richiesta. L'equazione diofantea è data da

$$R(z)(z-2)^2 + S(z) = z^l \ ,$$

uguagliando il numero di equazioni e di incognite, abbiamo che

$$\mathrm{Gr}[R] + 2 + 1 = \mathrm{Gr}[R] + grS + 2 \rightarrow \mathrm{Gr}[S] = 1 \ ,$$

per avere un controllore proprio occorre $\mathrm{Gr}[R] = \mathrm{Gr}[S] = 1$, l'equazione diofantea diventa quindi

$$(r_1 z + r_0)(z^2 - 4z + 4) + (s_1 z + s_0) = z^3 \ ,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_0 - 4r_1 = 0 \\ -4r_0 + 4r_1 + s_1 = 0 \\ 4r_0 + s_0 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$r_1 = 1, \ r_0 = 4, \ s_1 = 12, \ s_0 = -16 \ ,$$

da cui $R(z) = z + 4$, $S(z) = 12z - 16$, per completare è sufficiente porre $W(z) = 1$. Il sistema complessivo fa si che l'uscita corrisponda all'ingresso ritardato tre volte il tempo di campionamento. Se in ingresso abbiamo una rampa discreta $u(k) = k$, in uscita avremo $y(k) = u(k-3) = (k-3)$, quindi

$$\lim_{k \to \infty} y(k) - u(k) = 3 \ .$$