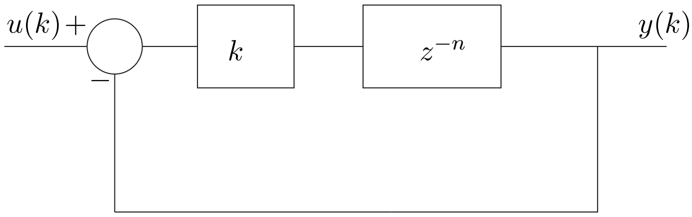
Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 27 Aprile 2007
Parte A

1- Presenta e dimostra il teorema di traslazione in indietro nel tempo. (Trasformata zeta di $x(k+n)$).

2- Definisci l'equivalente discreto di un sistema a tempo continuo $P(s)$ e calcola l'equivalente discreto di un sistema continuo preceduto dal filtro di hold.

3- Considera il seguente schema, in cui si assume $k > 0$,



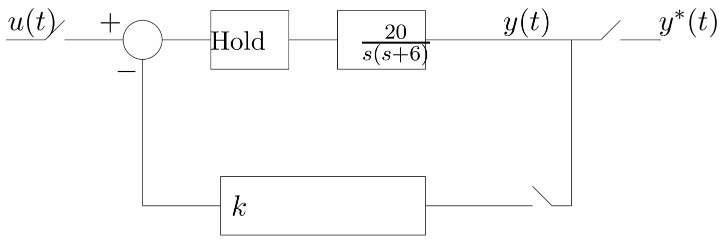
- Determina la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(k)$ e l'uscita $y(k)$.
- Determina l'equazione alle differenze che caratterizza il sistema.
- Determina i poli del sistema retroazionato e i valori del guadagno $k > 0$ per cui il sistema è asintoticamente stabile.
- Determina la risposta all'impulso del sistema quando $k = 1/2$ e $n = 4$.

4- Considera la seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} x(k) = x(k-2) + 1 \\ x(k) = 0 \ , \forall k < 0 \ , \end{cases}$$

- Risolvi l'equazione alle differenze con l'uso della trasformata zeta, determinando la soluzione $x(k)$,
- fai il grafico della soluzione ottenuta

5- Con riferimento allo schema seguente

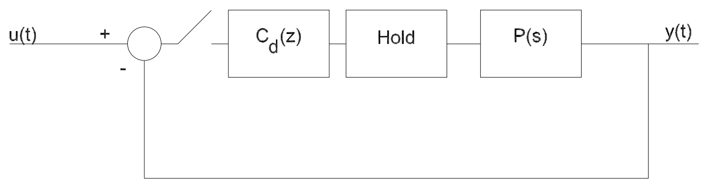


a) Trasforma lo schema in modo tale che compaiano solo segnali discreti.
b) Calcola la funzione di trasferimento discreta tra l'ingresso campionato $u^*(t)$ e l'uscita campionata $y^*(t)$.
c) Sostituendo $T = 1/6$ s, determina i valori del parametro k per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Università degli Studi di Parma - Facoltà di Ingegneria
Appello di Controlli Digitali del 27 Aprile 2007
Parte B

1- Presenta e dimostra il teorema di analisi armonica per i sistemi a tempo discreto.

2- Considera il seguente sistema



dove

$$P(s) = \frac{(1-s)(s+20)}{20s(s+3)}.$$

Progetta il controllore discreto $C_d(z)$ discretizzando la rete ritardatrice

$$C(s) = k\frac{1+\tau\alpha s}{1+\tau s}$$

in modo da soddisfare le specifiche

- errore a regime in risposta alla rampa pari a 0.2
- margine di ampiezza $M = 3$

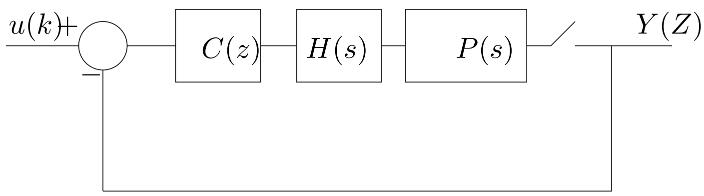
nel progetto occorre tener conto del ritardo di campionamento attraverso l'approssimazione

$$e^{-\frac{T}{2}s} \simeq \frac{1}{1+\frac{sT}{2}}$$

e considerare un tempo di campionamento $T = 0.1s$.

La discretizzazione va effettuata per mezzo della trasformazione di Tustin. Discutere se il tempo di campionamento scelto è appropriato, controllando la condizione $T < \frac{\pi}{10\omega_c}$, dove ω_c è la pulsazione critica.

3- Progetta un controllore $C(z)$ per il seguente sistema



con

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}\ ,$$

in modo che il sistema retroazionato abbia tutti i poli in $z = 0$. Assumi $T = 1\ s$.

Soluzione:

Parte A

Domanda 3
La funzione di trasferimento è data da

$$T(z) = \frac{kz^{-n}}{1+kz^{-n}} = \frac{k}{z^n+k} \; ,$$

a cui corresponde l'equazione alle differenze

$$y(k) + ky(k-n) = ku(k-n) \; .$$

I poli del sistema sono le soluzione di $z^n + k = 0$, da cui

$$p_i = k^{1/n} e^{j\frac{2\pi}{n}i}, \; i = 0, \ldots, n-1 \; ,$$

i poli hanno tutti modulo pari a $k^{1/n}$, dunque il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$|k^{1/n}| < 1 \leftarrow |k| < 1 \; .$$

Per $k = 1/2$ e $n = 4$, possiamo calcolare la risposta all'impulso risolvendo per iterazione l'equazione alle differenze $y(k) = -1/2y(k-4) + 1/2\delta(k-4)$, ottenendo

$$y(0) = y(1) = y(2) = y(3) = 0, \; y(4) = 1/2, \; y(5) = y(6) = y(7) = 0, \; y(8) = -1/4, \; y(9) = y(10) = y(11) = 0$$

si vede dunque che $y(k) = -(-1/2)^{k/4}$, se $k > 0$ e k è un multiplo di 4, altrimenti $y(k) = 0$.

Domanda 4
Facendo la trasformata zeta dell'equazione otteniamo

$$X(z) = z^{-2}X(z) + \frac{z}{(z-1)} \; ,$$

da cui

$$X(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2(z+1)} \; ,$$

usando la formula di inversione, otteniamo

$$x(k) = \mathrm{Res}(X(z)z^{k-1}, 1) = \frac{(-1)^k + 2k + 3}{4} \; .$$

Domanda 5
L'equivalente discreto della serie del filtro di hold e del sistema continuo è dato da

$$P(z) = \mathcal{Z}[H(s)\frac{20}{s^2(s+6)}] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}[\frac{10/18}{s+6} + \frac{10/3}{s^2} - \frac{20/18}{s}] = 5/9\frac{z(6T-1+e^{-6T}) + 1 - e^{-6T}(6T+1)}{(z-1)(z-e^{-6T})} \; ,$$

la funzione di trasferimento è data quindi da

$$T(z) = \frac{P(z)}{1+kP(z)} = \frac{5(z(6T-1+e^{-6T}) + 1 - e^{-6T}(6T+1))}{9(z-1)(z-e^{-6T}) + 5k[z(6T-1+e^{-6T}) + 1 - e^{-6T}(6T+1)]} \; .$$

sostituendo $T = 1/6\ s$, l'equazione caratteristica diventa

$$q(z) = 9z^2 + z(-9 - 9e^{-1} + 5ke^{-1}) + 5k(1 - 2e^{-1}) + 9e^{-1}\ ,$$

le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica sono

$$1)\ 9 > |5k(1 - 2e^{-1}) + 9e^{-1}|$$

da cui si ottengono le soluzioni

$$-\frac{9}{5}\frac{1 + e^{-1}}{1 - 2e^{-1}} < k < \frac{9}{5}\frac{1 - e^{-1}}{1 - 2e^{-1}} = 4.305$$

$$2)\ q(1) > 0 \leftarrow k > 0\ ,$$

$$3)\ q(-1) < 0 \leftarrow k < \frac{18}{5}\frac{1 + e^{1}}{3e^{-1} - 1} = 47.51\,.$$

Facendo l'intersezione delle condizioni trovate, otteniamo

$$k \in (0, 4.305)\ .$$

Parte B

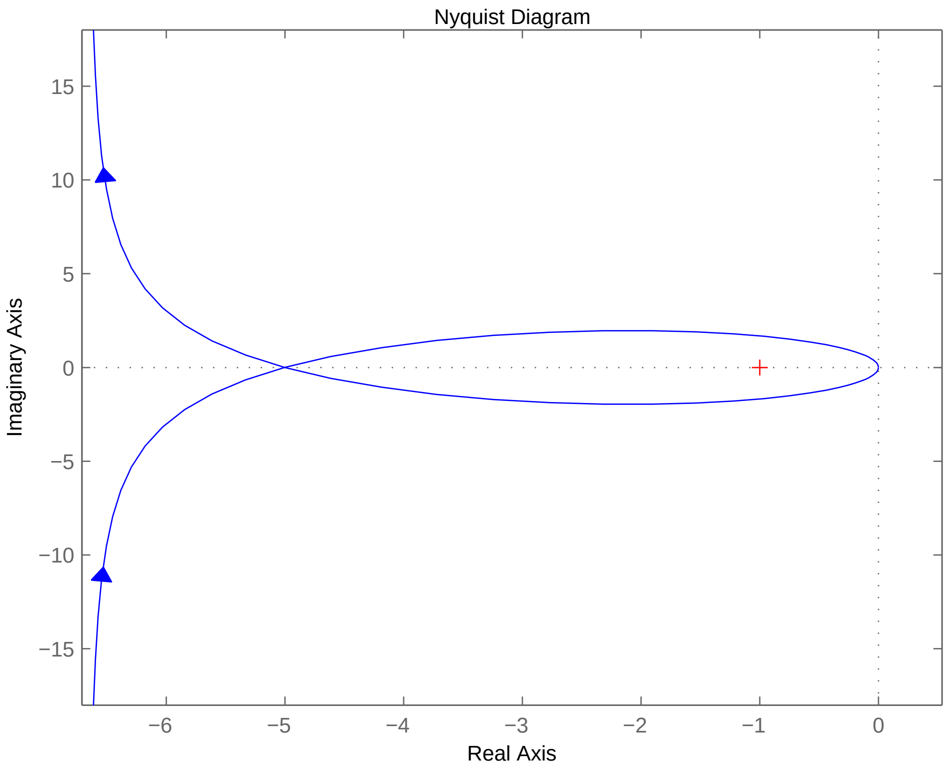
2-
Approssimiamo il filtro di hold con la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{20}{20 + s}\ ,$$

da cui

$$P_2(s) = P(s)H(s) = \frac{1 - s}{s(s + 3)}\ ,$$

per soddisfare alla specifica sull'errore a regime, risulta $k = 15$, consideriamo $P_3(s) = 15P_2(s)$. Il suo diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale in $\sigma = -20/3$, interseca l'asse reale in -5, per $\omega_c = \sqrt{3}$ ed è il seguente.



Applichiamo la formula di inversione con $\omega_0 = 1$, otteniamo

$$\phi = 180 + \arg(P(j)) = 0.4636, \;\; M = 3|P(j)| = 20.12$$

la condizione $\cos(\phi) > \frac{1}{M} \rightarrow 0.8944 > 0.0497$ è verificata, dalle formule di inversione risulta $\tau = 43$ e $\alpha = 0.0439$, il controllore continuo risulta dunque

$$C(s) = 15\frac{1 + 1.889s}{1 + 43s} \; .$$

il controllore discretizzato attraverso la trasformazione di Tustin $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ è

$$C_d(z) = \frac{0.6755(z - 0.9484)}{z - 0.9977} \; ,$$

il tempo di campionamento è appropriato in quanto $T < \frac{\pi}{10\omega c} = 0.3142$.

3- La funzione di trasferimento corrispondente alla serie del filtro di hold e di $P(s)$ è data da

$$P(z) = \mathcal{Z}[H(s)P(s)] = \frac{(e + e^{-1} - 2)(z + 1)}{2(z - e^{-1})(z - e)} \; ,$$

questo sistema presenta un polo stabile, per cancellarlo

$$S(z) = (z - e^{-1})S'(z) \; ,$$

l'equazione diofantea è dunque

$$R(z)2(z-e)+(e+e^{-1}-2)(z+1)S'(z)=z^n ,$$

per determinare i gradi, eguagliamo il numero delle incognite con il numero di equazioni, il numero di equazioni è dato da Gr$[R]+2$, il numero di incognite è dato da Gr$[S']+$ Gr$[R]+2$, da cui Gr$[S]=0$, inoltre per avere il controllore di grado relativo nullo, poniamo Gr$[R]=$ Gr$[S']+1$, da cui Gr$[R]=1$,

quindi l'equazione diofantea diventa

$$2(r_1 z+r_0)(z-e)+(e+e^{-1}-2)(z+1)s_0=z^2 ,$$

da cui otteniamo il sistema

$$\begin{array}{l} 2r_1=1 , \\ -2er_1+2r_0+(e+e^{-1}-2)s_0=0 \\ -2r_0 e+(e+e^{-1}-2)s_0=0 \end{array}$$

da cui

$$r_1=1/2,\ r_0=\frac{e}{2(1+e)}=0.3566,\ s_0=\frac{e^2}{2(1+e)(e+e^{-1}-2)}=1.8296 .$$

il controllore cercato risulta dunque

$$C(z)=\frac{1.8296(z-e^{-1})}{0.5z+0.3566} .$$